



गणित भाग -II

दसवीं कक्षा



भारत का संविधान

भाग 4 क

मूल कर्तव्य

अनुच्छेद 51 क

मूल कर्तव्य- भारत के प्रत्येक नागरिक का यह कर्तव्य होगा कि वह -

- (क) संविधान का पालन करे और उसके आदर्शों, संस्थाओं, राष्ट्र ध्वज और राष्ट्रगान का आदर करे;
- (ख) स्वतंत्रता के लिए हमारे राष्ट्रीय आंदोलन को प्रेरित करने वाले उच्च आदर्शों को हृदय में संजोए रखे और उनका पालन करें;
- (ग) भारत की प्रभुता, एकता और अखंडता की रक्षा करे और उसे अक्षुण्ण रखें;
- (घ) देश की रक्षा करे और आह्वान किए जाने पर राष्ट्र की सेवा करे;
- (ङ) भारत के सभी लोगों में समरसता और समान भ्रातृत्व की भावना का निर्माण करे जो धर्म, भाषा और प्रदेश या वर्ग पर आधारित सभी भेदभावों से परे हो, ऐसी प्रथाओं का त्याग करे जो स्त्रियों के सम्मान के विरुद्ध है;
- (च) हमारी सामासिक संस्कृति की गौरवशाली परंपरा का महत्त्व समझे और उसका परिरक्षण करे;
- (छ) प्राकृतिक पर्यावरण की, जिसके अंतर्गत वन, झील, नदी और वन्य जीव हैं, रक्षा करे और उसका संवर्धन करे तथा प्राणिमात्र के प्रति दयाभाव रखे;
- (ज) वैज्ञानिक दृष्टिकोण, मानववाद और ज्ञानार्जन तथा सुधार की भावना का विकास करें;
- (झ) सार्वजनिक संपत्ति को सुरक्षित रखे और हिंसा से दूर रहे;
- (ञ) व्यक्तिगत और सामूहिक गतिविधियों के सभी क्षेत्रों में उत्कर्ष की ओर बढ़ने का सतत प्रयास करे जिससे राष्ट्र निरंतर बढ़ते हुए प्रयत्न और उपलब्धि की नई ऊँचाइयों को छू ले;
- (ट) यदि माता-पिता या संरक्षक है, छह वर्ष से चौदह वर्ष तक की आयु वाले अपने, यथास्थिति, बालक या प्रतिपाल्य के लिए शिक्षा के अवसर प्रदान करे ।

शासन निर्णय क्रमांक : अभ्यास-२११६/(प्र.क्र.४३/१६) एसडी-४ दिनांक २५.४.२०१६ के अनुसार गठित की गई
समन्वय समिति के दिनांक २९.१२.२०१७ की बैठक में इस पाठ्यपुस्तक को वर्ष २०१८-१९
शैक्षणिक वर्ष से निर्धारित करने हेतु मान्यता प्रदान की गई !

गणित

भाग II

दसवीं कक्षा



महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मित व अभ्यासक्रम संशोधन मंडल, पुणे - ४११ ००४.



आपके स्मार्टफोन में 'DIKSHA App' द्वारा, पुस्तक के प्रथम पृष्ठ पर Q.R.Code के माध्यम से डिजिटल पाठ्यपुस्तक एवं प्रत्येक पाठ में अंतर्निहित Q.R.Code में अध्ययन अध्यापन के लिए पाठ से संबंधित उपयुक्त दृक-श्राव्य सामग्री उपलब्ध कराई जाएगी ।

प्रथमावृत्ति : 2018 © महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिति व अभ्यासक्रम संशोधन मंडल
चौथा पुनर्मुद्रण : 2022 पुणे - ४११ ००४.

इस पाठ्यपुस्तक का सर्वाधिकार महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिति तथा अभ्यासक्रम संशोधन मंडल के अधीन सुरक्षित है। इस पुस्तक का कोई भी भाग महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिति व अभ्यासक्रम संशोधन मंडल के संचालक की लिखित अनुमति के बिना प्रकाशित नहीं किया जा सकता !

गणित विषयतज्ञ समिति

डॉ. मंगला नारळीकर	(अध्यक्ष)
डॉ. जयश्री अत्रे	(सदस्य)
श्री. विनायक गोडबोले	(सदस्य)
श्रीमती प्राजक्ती गोखले	(सदस्य)
श्री. रमाकांत सरोदे	(सदस्य)
श्री. संदीप पंचभाई	(सदस्य)
श्रीमती पूजा जाधव	(सदस्य)
श्रीमती उज्ज्वला गोडबोले	(सदस्य-सचिव)

मुखपृष्ठ व संगणकीय आरेखन

श्री. संदीप कोळी, चित्रकार, मुंबई

अक्षरांकन

डी.टी.पी. विभाग, पाठ्यपुस्तक मंडल, पुणे

अनुवादक : श्री. अरविंदकुमार तिवारी

श्री. सुनील श्रीवास्तव

श्रीमती. मुकुल बापट

समीक्षण : श्री. धीरज शर्मा

श्री. लीलाराम बोपचे

विषयतज्ञ : श्री. प्रेमवल्लभ ओझा

गणित विषय - राज्य अभ्यासगट सदस्य

श्रीमती जयश्री पुरंदरे	श्रीमती तरुबेन पोपट
श्री. राजेंद्र चौधरी	श्री. प्रमोद ठोंबरे
श्री. रामा व्हन्याळकर	डॉ. भारती सहस्रबुद्धे
श्री. आण्णापा परीट	श्री. वसंत शेवाळे
श्री. अन्सार शेख	श्री. प्रताप काशिद
श्री. श्रीपाद देशपांडे	श्री. मिलिंद भाकरे
श्री. सुरेश दाते	श्री. ज्ञानेश्वर माशाळकर
श्री. उमेश रेळे	श्री. गणेश कोलते
श्री. बन्सी हावळे	श्री. संदेश सोनावणे
श्रीमती रोहिणी शिर्के	श्री. सुधीर पाटील
श्री. प्रकाश झेंडे	श्री. प्रकाश कापसे
श्री. लक्ष्मण दावणकर	श्री. रवींद्र खंदारे
श्री. श्रीकांत रत्नपारखी	श्रीमती स्वाती धर्माधिकारी
श्री. सुनिल श्रीवास्तव	श्री. अरविंदकुमार तिवारी
श्री. अन्सारी अब्दुल हमीद	श्री. मल्लेशाम बेथी
श्रीमती सुवर्णा देशपांडे	श्रीमती आर्या भिडे

प्रमुख संयोजक

उज्ज्वला श्रीकांत गोडबोले

प्र. विशेषाधिकारी गणित,

पाठ्यपुस्तक मंडल, पुणे.

निर्मिती : सचिन मेहता

मुख्य निर्मिती अधिकारी

संजय कांबळे

निर्मिती अधिकारी

प्रशांत हरणे

सहायक निर्मिती अधिकारी

कागद : ७० जी.एस.एम.क्रीमवोव्ह

मुद्रणादेश : N/PB/

मुद्रक :

प्रकाशक

विवेक उत्तम गोसावी, नियंत्रक

पाठ्यपुस्तक निर्मिती मंडल

प्रभादेवी, मुंबई २५

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक न्याय,
विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म

और उपासना की स्वतंत्रता,
प्रतिष्ठा और अवसर की समता

प्राप्त कराने के लिए,
तथा उन सब में

व्यक्ति की गरिमा और राष्ट्र की एकता
और अखंडता सुनिश्चित करने वाली बंधुता
बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर अपनी इस संविधान सभा में आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. (मिति मार्गशीर्ष शुक्ला सप्तमी, संवत् दो हजार छह विक्रमी) को एतद् द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं ।

राष्ट्रगीत

जनगणमन - अधिनायक जय हे
भारत - भाग्यविधाता ।
पंजाब, सिंधु, गुजरात, मराठा,
द्राविड, उत्कल, बंग,
विंध्य, हिमाचल, यमुना, गंगा,
उच्छल जलधितरंग,
तव शुभ नामे जागे, तव शुभ आशिस मागे,
गाहे तव जयगाथा,
जनगण मंगलदायक जय हे,
भारत - भाग्यविधाता ।
जय हे, जय हे, जय हे,
जय जय जय, जय हे ॥

प्रतिज्ञा

भारत मेरा देश है । सभी भारतीय मेरे भाई-
बहन हैं ।

मुझे अपने देश से प्यार है । अपने देश की
समृद्ध तथा विविधताओं से विभूषित परंपराओं
पर मुझे गर्व है ।

मैं हमेशा प्रयत्न करूँगा/करूँगी कि उन
परंपराओं का सफल अनुयायी बनने की क्षमता
मुझे प्राप्त हो ।

मैं अपने माता-पिता, गुरुजनों और बड़ों
का सम्मान करूँगा/करूँगी और हर एक से
सौजन्यपूर्ण व्यवहार करूँगा/करूँगी ।

मैं प्रतिज्ञा करता/करती हूँ कि मैं अपने
देश और अपने देशवासियों के प्रति निष्ठा
रखूँगा/रखूँगी । उनकी भलाई और समृद्धि में
ही मेरा सुख निहित है ।

प्रस्तावना

विद्यार्थी मित्रों,

दसवीं कक्षा में आप सभी का स्वागत ।

इस वर्ष आप गणित भाग I और भाग II पुस्तक का अध्ययन करनेवाले हैं ।

गणित भाग II में भूमिति, त्रिकोणमिति, निर्देशांक भूमिति तथा महत्वमापन यह प्रमुख क्षेत्र हैं । इस वर्ष आपको नौवीं कक्षा तक परिचय किए गये घटकों का थोड़ा अधिक अध्ययन करना है । उनका व्यवहार में होनेवाला उपयोग उदाहरण से स्पष्ट होगा । जहाँ नवीन भाग, सूत्र अथवा उपयोजन है वहाँ सरल स्पष्टीकरण दिया गया है । नमूना के लिए प्रत्येक प्रकरण में हल किए गये उदाहरण, अभ्यास के लिए उदाहरण, इसके अलावा प्रज्ञावान विद्यार्थियों के लिए कुछ चुनौतीपूर्ण प्रश्न को तारांकित किया गया है । दसवी के पश्चात कुछ विद्यार्थियों को गणित का अध्ययन करना न हो, तो भी गणित की मूलभूत संकल्पनाएँ उन्हें समझ में आए, उसी प्रकार अन्य क्षेत्रों में काम करते समय आवश्यकतानुसार गणित का उपयोग करना आना चाहिए, ऐसा ज्ञान उन्हें इस पुस्तक में प्राप्त होगा । अधिक जानकारी हेतु इस शीर्षक के अंतर्गत दी गई जानकारी, जिस विद्यार्थियों को दसवीं के पश्चात गणित का अध्ययन करके उसमें प्राविण्य प्राप्त करने की इच्छा हो, उनके लिए यह उपयोगी सिद्ध होगा इसलिए ऐसे विद्यार्थियों को इस पुस्तक को अवश्य पढ़ना होगा । पूरी किताब को एक बार पढ़कर अवश्य समझें ।

प्रत्येक प्रकरण से संबंधित अधिक उपयुक्त टूक श्रव्य साहित्य, अँप के माध्यम से, क्यू. आर. कोड द्वारा आपको उपलब्ध होगी, अध्ययन के लिए इसका उपयोग निश्चित रूप से होगा !

कक्षा दसवीं की परीक्षा बहुत महत्त्वपूर्ण मानी जाती है । इस का तनाव न लेते हुए सही अध्ययन करके मन माफिक सफलता प्राप्त करने के लिए आप सभी को शुभकामनाएँ !



(डॉ. सुनिल मगर)

संचालक

पुणे

दिनांक : १८ मार्च २०१८, गुढीपाडवा

भारतीय सौर दिनांक : २७ फाल्गुन १९३९

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व
अभ्यासक्रम संशोधन मंडल, पुणे.

कक्षा १० वीं गणित भाग II अभ्यासक्रम से विद्यार्थियों में निम्नलिखित क्षमता विकसित होगी ।

क्षेत्र	घटक	क्षमता कथन
1. भूमिति	1.1 समरूप त्रिभुज 1.2 वृत्त	<ul style="list-style-type: none"> • समरूप त्रिभुजों के गुणधर्म, सर्वांगसम त्रिभुजों के गुणधर्म तथा पायथागोरस के प्रमेय का उपयोग करके प्रश्नों का हल कर सकना । • समरूप त्रिभुजों की रचना कर सकना । • वृत्त की जीवा एवं स्पर्शरेखा के गुणधर्म का उपयोग कर सकना । • वृत्त की स्पर्शरेखा की रचना कर सकना ।
2. निर्देशांक भूमिति	2.1 निर्देशांक भूमिति	<ul style="list-style-type: none"> • दो बिंदुओं के बीच अंतर ज्ञात कर सकना । • रेखाखंड के विभाजन बिंदु का निर्देशांक ज्ञात कर सकना । • रेखा का ढाल ज्ञात कर सकना ।
3. महत्वमापन	3.1 पृष्ठफल और घनफल	<ul style="list-style-type: none"> • वृत्त चाप की लंबाई ज्ञात कर सकना । • द्वैत्रिज्य एवं वृत्तखंड के क्षेत्रफल ज्ञात कर सकना । • दिए गए त्रिमितीय आकारों के पृष्ठफल एवं घनफल ज्ञात कर सकना ।
4. त्रिकोणमिति	4.1 त्रिकोणमिति	<ul style="list-style-type: none"> • त्रिकोणमितीय सर्वसमिका का उपयोग कर प्रश्नों को हल कर सकना । • पेड़ों की ऊँचाई ज्ञात करना, नदी के पाट की चौड़ाई ज्ञात कर सकना इस तरह की समस्याओं के लिए त्रिकोणमिति का उपयोग कर सकना ।

शिक्षकों के लिए सूचना

सर्वप्रथम पुस्तक का गहन अध्ययन कर इसे समझ लीजिए । विभिन्न घटकों का स्पष्टीकरण करना एवं सूत्रों की जाँच करके देखना इन महत्वपूर्ण बातों के लिए कृतियों की सहायता लीजिए ।

प्रयोगों द्वारा भी मूल्यमापन करना है । इसके लिए भी कृति का उपयोग होता है । विद्यार्थियों को स्वतंत्र विचार करने के लिए प्रोत्साहन दीजिए । किसी प्रश्न को भिन्न किंतु तर्कसंगत विधि से हल करनेवाले विद्यार्थियों को खास तरह की शाबासी दीजिए ।

भूमिति में प्रयोगों के कथन ध्यान में रखकर उनका उपयोग करके प्रश्नों को हल करने की कुशलता विकसित करने के लिए पुस्तक में दी गई कृतियों के अतिरिक्त कुछ और कृतियाँ की जा सकती हैं ।

प्रयोगों की सूची

- (1) पुठ्ठे का एक त्रिभुजाकार टुकड़ा काट लीजिए । टेबल पर मोमबत्ती अथवा छोटा दीया लगाइए । त्रिभुज को दीवार तथा दीया या मोमबत्ती के बीच पकड़िए उसकी परछाई का निरीक्षण कीजिए । निश्चित कीजिए कि परछाई तथा मूल त्रिभुज समरूप हैं क्या ? (मूल त्रिभुज तथा उसकी परछाई परस्पर समरूप होने के लिए कौन-सी सावधानी बरतेंगे?)
- (2) समान माप वाले दो समकोण त्रिभुज काट लीजिए । त्रिभुज के शीर्षबिंदुओं को दोनो ओर से A, B, C ऐसे नाम दीजिए । उसमें से एक समकोण त्रिभुज के कर्ण पर शीर्षलंब खींचिए । लंबपाद को 'D' नाम दीजिए । एक त्रिभुज को लंब से काटकर दो समकोण त्रिभुज प्राप्त कीजिए । तीनों समकोण त्रिभुज कौन-सी एकैकी संगति के अनुसार समरूप हैं लिखिए ।
- (3) किसी एक वृत्त की रचना कीजिए । उसके अंतःभाग में, बाह्यभाग में तथा वृत्त पर प्रत्येक ऐसे तीन बिंदु लीजिए । इस प्रत्येक बिंदु से वृत्त पर कितनी स्पर्शखाएँ खींची जा सकती हैं इसकी सारिणी तैयार कीजिए । सारिणी में कच्ची आकृतियाँ खींच कर दर्शाइए ।
- (4) 'दो बिंदु से असंख्य वृत्त खींचे जा सकते हैं' यह दर्शाने के लिए, दिए गये बिंदु से कम से कम पाँच वृत्त खींचिए ।
- (5) वृत्तों के गुणधर्म जाँच करने के लिए उपयोगी हों ऐसे कील लगे हुए जिओबोर्ड लीजिए । रबरबैंड की सहायता से निम्नलिखित में से किसी एक प्रमेय के लिए जिओबोर्ड पर आकृति तैयार कीजिए ।
 - (i) अंतर्लिखित कोण का प्रमेय
 - (ii) स्पर्शखा-छेदन रेखा कोण का प्रमेय
 - (iii) विपरीत वृत्तखंड के कोण का प्रमेय
- (6) एक वृत्त तथा एक कोण की प्रतिकृति लेकर विभिन्न स्थितियों से वृत्तखंड चाप तैयार कीजिए ।
- (7) कंपास तथा पट्टी की सहायता से किसी कोण के चार समान भाग करना ।
- (8) एक बीकर लेकर उसकी ऊँचाई तथा आधार की त्रिज्या नापिए । इस आधार पर उसमें कितना पानी समाएगा उसे सूत्र की सहायता से ज्ञात कीजिए । उसे पानी से भरकर उसके आकारमान को मापनपात्र की सहायता से मापिए । दोनों ही उत्तर से निष्कर्ष ज्ञात कीजिए ।
- (9) शंकुछेद के आकार का एक कागज का प्याला लीजिए । उसके आधार की तथा ऊपरी वृत्त की त्रिज्या नापिए । प्याले की ऊँचाई नापिए । उस प्याले में कितना पानी समाएगा, उसे सूत्र से ज्ञात कीजिए । उसे पानी से पूरा भरकर उस पानी के आकारमान को मापिए । पानी के आकारमान तथा सूत्र से ज्ञात किए गए घनफल की तुलना सूत्र की सहायता से कीजिए ।
- (10) मोटे पुठ्ठे के दो समरूप त्रिभुज काट लें । उनके क्षेत्रफलों का अनुपात (i) उसकी परिमिति के वर्ग के अनुपात में है क्या ? अथवा (ii) उसके माध्यिकाओं के वर्गों के अनुपात में है क्या ? यह प्रत्यक्ष मापन से निश्चित कीजिए ।

अनुक्रमणिका

प्रकरण	पृष्ठ
1. समरूपता	1 से 29
2. पायथागोरस का प्रमेय	30 से 46
3. वृत्त	47 से 90
4. भूमितीय रचनाएँ	91 से 99
5. निर्देशांक भूमिति	100 से 123
6. त्रिकोणमिति.....	124 से 139
7. महत्वमापन	140 से 163
• उत्तरसूची	164 से 168

1

समरूपता



आओ सीखें

- दो त्रिभुजों के क्षेत्रफल का अनुपात
- समानुपात का मूलभूत प्रमेय
- समानुपात के मूलभूत प्रमेय का विलोम
- त्रिभुज के कोण समद्विभाजक का गुणधर्म
- तीन समांतर रेखा तथा तिर्यक रेखा द्वारा बने अंतःखंडों का गुणधर्म
- समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल का गुणधर्म
- त्रिभुजों की समरूपता की कसौटी



थोड़ा याद करें

हमने अनुपात तथा समानुपात का अध्ययन किया है। a और b इन दो संख्याओं का अनुपात $\frac{m}{n}$ है, इस कथन को a और b दोनों संख्याएँ $m:n$ के अनुपात में हैं, ऐसा भी लिखा जाता है।

इस संकल्पना के लिए हम सामान्यतः धनात्मक वास्तविक संख्या का विचार करते हैं। हमें यह ज्ञात है कि रेखाखंडों की लंबाई और किसी आकृति का क्षेत्रफल धनात्मक वास्तविक संख्या होती है।

हमें त्रिभुजों के क्षेत्रफल के सूत्र की जानकारी है।

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \text{ आधार} \times \text{ऊँचाई}$$



आओ जानें

दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात (Ratio of areas of two triangles)

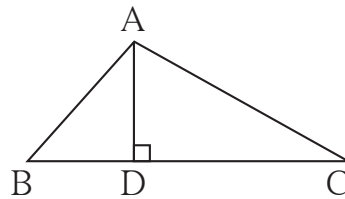
किन्हीं दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात करेंगे।

उदाहरण ΔABC का आधार BC तथा ऊँचाई AD है।

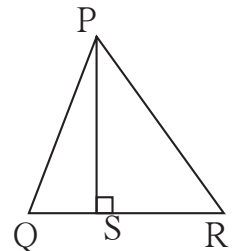
ΔPQR का आधार QR तथा ऊँचाई PS

है।

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AD}{\frac{1}{2} \times QR \times PS}$$



आकृति 1.1

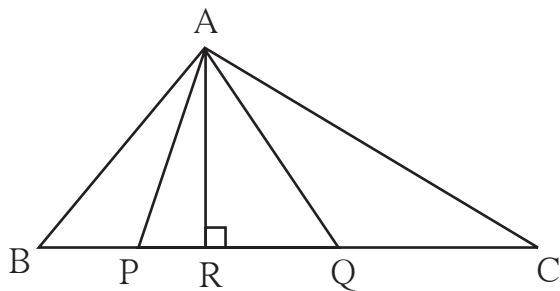


आकृति 1.2

कृति :

नीचे दी गई रिक्त चौखटें भरिए ।

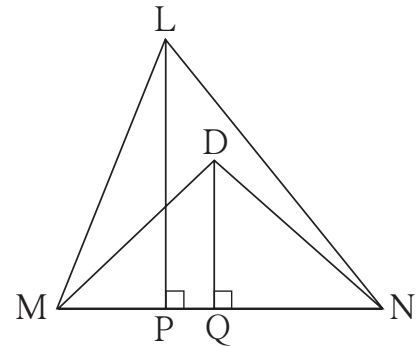
(i)



आकृति 1.6

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APQ)} = \frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \frac{\square}{\square}$$

(ii)



आकृति 1.7

$$\frac{A(\Delta LMN)}{A(\Delta DMN)} = \frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \frac{\square}{\square}$$

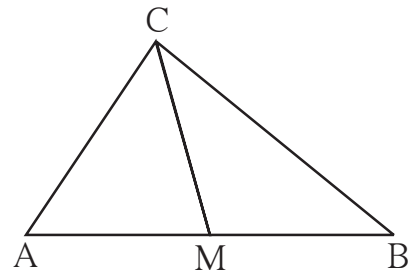
(iii)

बिंदु M यह रेखा AB का मध्य बिंदु है ।

रेखा CM यह ΔABC की माध्यिका है ।

$$\begin{aligned} \therefore \frac{A(\Delta AMC)}{A(\Delta BMC)} &= \frac{\square}{\square} \\ &= \frac{\square}{\square} = \square \end{aligned}$$

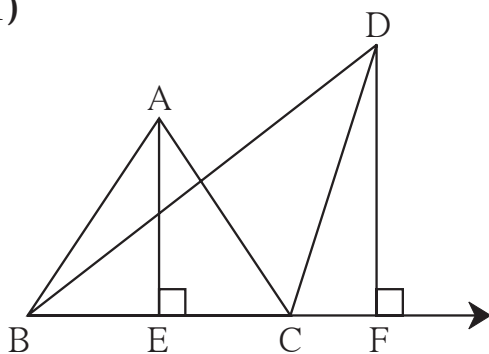
कारण लिखिए ।



आकृति 1.8

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1)



आकृति 1.9

संलग्न आकृति में,

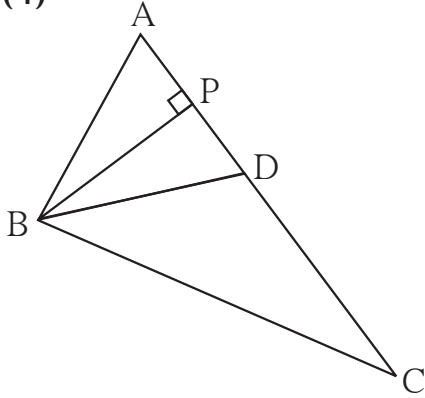
रेखा $AE \perp$ रेखा BC, रेखा $DF \perp$ रेखा BC

$AE = 4$, $DF = 6$ तो $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)} = \frac{AE}{DF}$ समान आधारवाले त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत ऊँचाई के अनुपात के बराबर होता है ।

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

उदा. (4)



आकृति 1.12

संलग्न आकृति में ΔABC की भुजा AC पर बिंदु D

इस प्रकार है कि $AC = 16, DC = 9,$

$BP \perp AC$, तो निम्नलिखित अनुपात ज्ञात कीजिए ।

(i) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$ (ii) $\frac{A(\Delta BDC)}{A(\Delta ABC)}$

(iii) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta BDC)}$

हल : ΔABC में भुजा AC पर बिंदु P तथा बिंदु D हैं। इसलिए $\Delta ABD, \Delta BDC, \Delta ABC, \Delta APB$ का सामान्य शीर्षबिंदु B पर विचार करें तो उनकी AD, DC, AC, AP आदि भुजाएँ एक ही रेखा पर स्थित हैं। इन सभी त्रिभुजों की ऊँचाई समान है। इसलिए इन त्रिभुजों का क्षेत्रफल उनके आधारों के अनुपात में है।

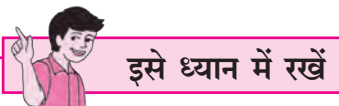
$AC = 16, DC = 9,$

$\therefore AD = 16 - 9 = 7$

$\therefore \frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)} = \frac{AD}{AC} = \frac{7}{16} \dots\dots\dots$ (समान ऊँचाईवाले त्रिभुज)

$\frac{A(\Delta BDC)}{A(\Delta ABC)} = \frac{DC}{AC} = \frac{9}{16} \dots\dots\dots$ (समान ऊँचाईवाले त्रिभुज)

$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta BDC)} = \frac{AD}{DC} = \frac{7}{9} \dots\dots\dots$ (समान ऊँचाईवाले त्रिभुज)



- दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उन त्रिभुजों के संगत आधार तथा संगत ऊँचाइयों के गुणनफल के अनुपात के बराबर होता है।
- समान ऊँचाई वाले त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनके संगत आधारों के अनुपात के बराबर होता है।
- समान आधारवाले त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत ऊँचाइयों के अनुपात के बराबर होता है।

प्रश्नसंग्रह 1.1

1. यदि किसी त्रिभुज का आधार 9 और ऊँचाई 5 है। दूसरे त्रिभुज का आधार 10 और ऊँचाई 6 हो तो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

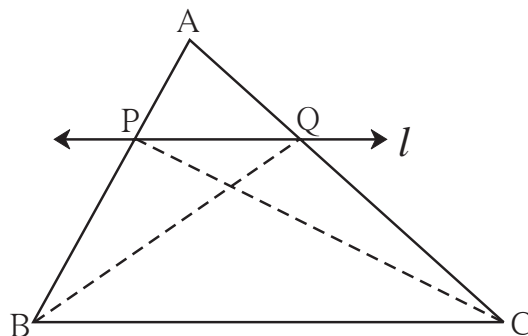


आओ जानें

समानुपात का मूलभूत प्रमेय (Basic Proportionality Theorem)

प्रमेय : यदि किसी त्रिभुज की किसी एक भुजा के समांतर खींची गई रेखा उसकी अन्य दो भुजाओं को दो भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करे तो वह रेखा अन्य दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।

दत्त : ΔABC में रेखा $l \parallel$ भुजा BC
और रेखा l यह भुजा AB को बिंदु P पर
तथा भुजा AC को बिंदु Q पर
प्रतिच्छेदित करती है।



आकृति 1.17

साध्य : $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

रचना : रेख PC तथा रेख BQ खींचिए।

उपपत्ति : ΔAPQ तथा ΔPQB समान ऊँचाई वाले त्रिभुज हैं।

$$\therefore \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \frac{AP}{PB} \quad \dots\dots\dots \text{(आधार के अनुपात में क्षेत्रफल)} \quad \dots\dots (I)$$

$$\text{इसी प्रकार } \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)} = \frac{AQ}{QC} \quad \dots\dots\dots \text{(आधार के अनुपात में क्षेत्रफल)} \quad \dots\dots (II)$$

ΔPQB तथा ΔPQC में रेख PQ सामान्य आधार है। रेख $PQ \parallel$ रेख BC

इसलिए ΔPQB तथा ΔPQC की ऊँचाई समान है।

$$A(\Delta PQB) = A(\Delta PQC) \quad \dots\dots\dots (III)$$

$$\frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)} \quad \dots\dots\dots [(I), (II) \text{ तथा } (III)] \text{ से}$$

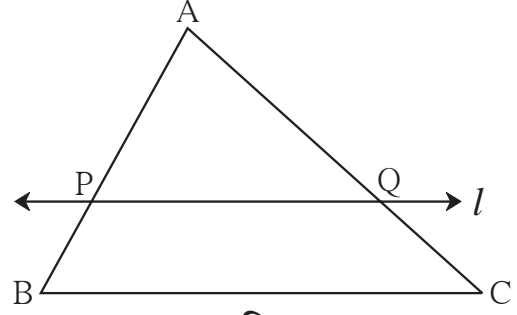
$$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \quad \dots\dots\dots [(I) \text{ तथा } (II)] \text{ से}$$

समानुपात के मूलभूत प्रमेय का विलोम (converse of B.P.T.)

प्रमेय : यदि कोई रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है, तो वह रेखा उस त्रिभुज की तीसरी भुजा के समांतर होती है।

आकृति 1.18 में रेखा l यह ΔABC की भुजा AB और भुजा AC को क्रमशः बिंदु P और Q पर प्रतिच्छेदित करती है। और $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ तो रेखा $l \parallel$ रेख BC

इस प्रमेय की उपपत्ति अप्रत्यक्ष पद्धति से दे सकते हैं।

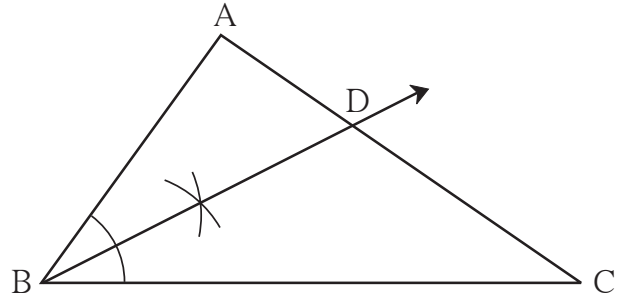


आकृति 1.18

कृति :

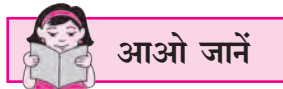
- किसी एक ΔABC की रचना कीजिए।
- त्रिभुज के $\angle B$ को समद्विभाजित कीजिए। वह AC को जिस बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती है उसे D नाम दीजिए।

- भुजा नापकर लिखिए।
 $AB = \square$ सेमी $BC = \square$ सेमी
 $AD = \square$ सेमी $DC = \square$ सेमी



आकृति 1.19

- $\frac{AB}{BC}$ तथा $\frac{AD}{DC}$ का अनुपात ज्ञात कीजिए।
- दोनों अनुपात लगभग समान होते हैं, यह समझ में आता है।
- त्रिभुज के अन्य कोणों को समद्विभाजित कीजिए तथा उपर्युक्त विधि से अनुपात ज्ञात कीजिए। यह अनुपात भी समान आते हैं इसे समझिए।



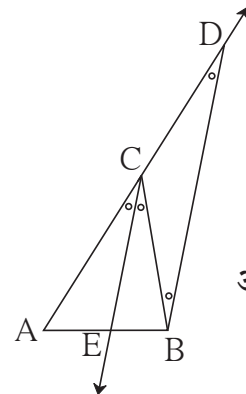
त्रिभुज के कोण समद्विभाजक का प्रमेय (Theorem of angle bisector of a triangle)

प्रमेय : किसी त्रिभुज में कोण का समद्विभाजक, कोण की सम्मुख भुजा को अन्य भुजाओं की लंबाइयों के अनुपात में विभाजित करता है।

दत्त : ΔABC में $\angle C$ का समद्विभाजक रेखा AB को बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करता है।

साध्य : $\frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB}$

रचना : बिंदु B से, किरण CE के समांतर एक रेखा खींचिए जो किरण AC को बिंदु D पर प्रतिच्छेदित करती हो।



आकृति 1.20

उपपत्ति : किरण $CE \parallel$ किरण BD और रेखा AD तिर्यक रेखा है ।

$$\therefore \angle ACE = \angle CDB \quad \dots\dots\dots (\text{संगत कोण}) \quad \dots(\text{I})$$

अब BC को तिर्यक रेखा मानकर

$$\angle ECB = \angle CBD \quad \dots\dots\dots (\text{एकांतर कोण}) \quad \dots(\text{II})$$

$$\text{परंतु } \angle ACE \cong \angle ECB \quad \dots\dots\dots (\text{दत्त}) \quad \dots(\text{III})$$

$$\therefore \angle CBD \cong \angle CDB \quad \dots\dots\dots [\text{कथन (I), (II) तथा (III) से}]$$

ΔCBD में, भुजा $CB \cong$ भुजा CD $\dots\dots\dots$ (सर्वांगसम कोणों की सम्मुख भुजाएँ)

$$\therefore CB = CD \quad \dots(\text{IV})$$

अब, ΔABD में रेखा $EC \parallel$ भुजा BD $\dots\dots\dots$ (रचना)

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CD} \quad \dots\dots\dots (\text{समानुपात का मूलभूत प्रमेय}) \quad \dots(\text{V})$$

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CB} \quad \dots\dots\dots [\text{कथन (IV) तथा (V) से}]$$

अधिक जानकारी हेतु :

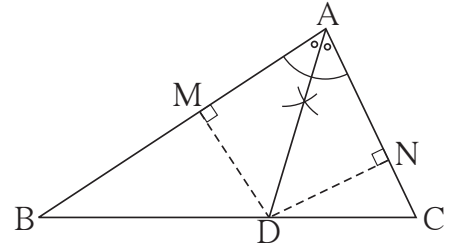
उपर्युक्त प्रमेय की उपपत्ति दूसरे प्रकार से स्वयं लिखिए ।

इसके लिए आकृति 1.21 में दर्शाए अनुसार ΔABC की रचना कीजिए और $DM \perp AB$ तथा $DN \perp AC$ खींचिए ।

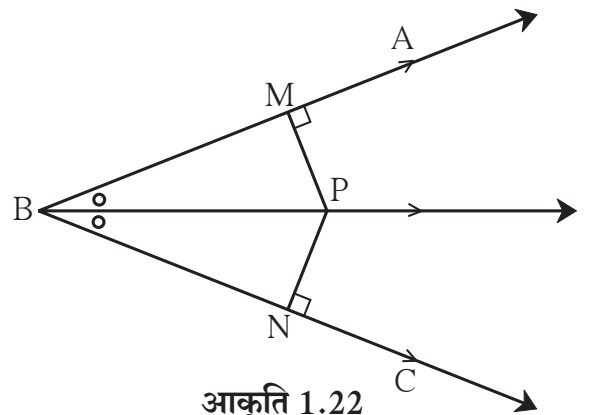
- (1) समान ऊँचाई वाले त्रिभुजों के क्षेत्रफल उनके संगत आधारों के अनुपात के बराबर होते हैं इसका उपयोग कीजिए ।

और

- (2) कोण के समद्विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिंदु कोण के भुजाओं से समदूरस्थ होता है । इस गुणधर्म का उपयोग कीजिए ।



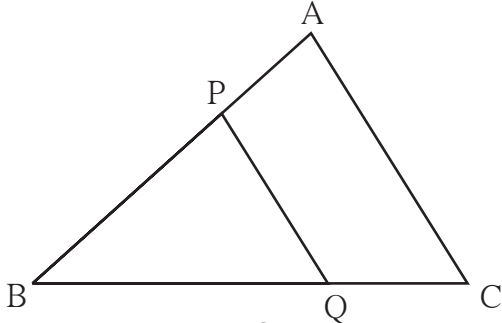
आकृति 1.21



आकृति 1.22



इसे ध्यान में रखें

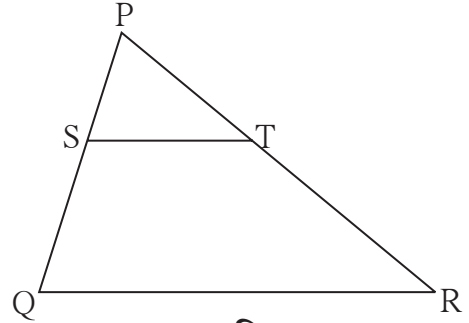


आकृति 1.25

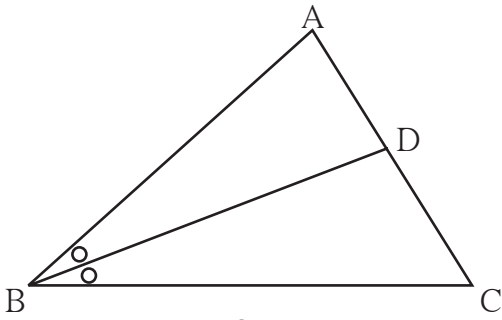
- (1) समानुपात का मूलभूत प्रमेय
 ΔABC में यदि $B-P-A$; $B-Q-C$
रेख $PQ \parallel$ रेख AC हो

$$\text{तो } \frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC}$$

- (2) समानुपात के मूलभूत प्रमेय का विलोम
 ΔPQR में यदि $P-S-Q$; $P-T-R$
तथा $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$
तो रेख $ST \parallel$ रेख QR .



आकृति 1.26

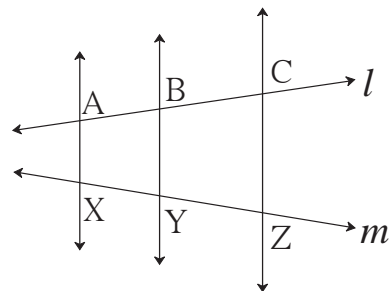


आकृति 1.27

- (3) त्रिभुज के कोण समद्विभाजक का प्रमेय
यदि ΔABC में रेख BD यह $\angle ABC$ की
समद्विभाजक हो और $A-D-C$ हो,
तो $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$

- (4) तीन समांतर रेखाओं तथा उनकी तिर्यक रेखा
का गुणधर्म
यदि रेखा $AX \parallel$ रेखा $BY \parallel$ रेखा CZ और
तिर्यक रेखाएँ l तथा m क्रमशः A, B, C तथा
 X, Y, Z में प्रतिच्छेदित करती हो, तो

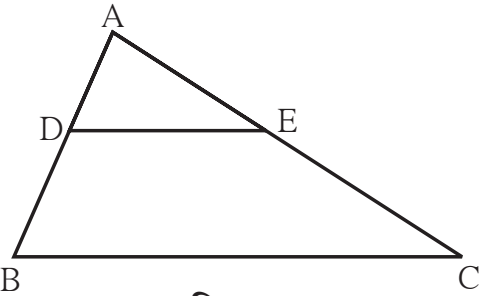
$$\frac{AB}{BC} = \frac{XY}{YZ}$$



आकृति 1.28

हल किए गए उदाहरण

उदा (1) ΔABC में $DE \parallel BC$
 $DB = 5.4$ सेमी, $AD = 1.8$ सेमी
 $EC = 7.2$ सेमी तो AE का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 1.29

हल : ΔABC में $DE \parallel BC$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \dots\dots (\text{समानुपात का मूलभूत प्रमेय})$$

$$\therefore \frac{1.8}{5.4} = \frac{AE}{7.2}$$

$$AE \times 5.4 = 1.8 \times 7.2$$

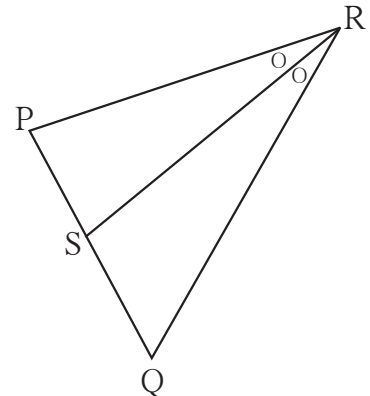
$$AE = \frac{1.8 \times 7.2}{5.4} = 2.4$$

$$AE = 2.4 \text{ सेमी}$$

उदा. (2) ΔPQR में रेखा RS यह $\angle R$ की समद्विभाजक है।

$$PR = 15, RQ = 20, PS = 12$$

तो SQ का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 1.30

हल : ΔPRQ में रेखा RS यह $\angle R$ की समद्विभाजक है।

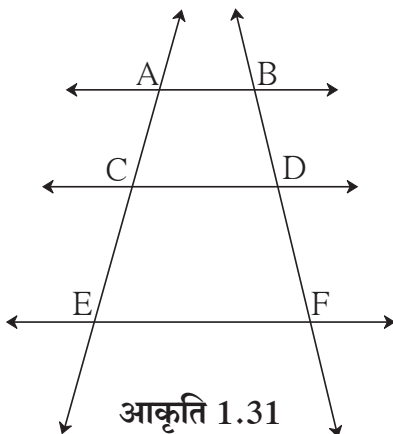
$$\frac{PR}{RQ} = \frac{PS}{SQ} \dots\dots (\text{कोण समद्विभाजक का प्रमेय})$$

$$\frac{15}{20} = \frac{12}{SQ}$$

$$SQ = \frac{12 \times 20}{15} = 16$$

$$\therefore SQ = 16$$

कृति :



आकृति 1.31

संलग्न आकृति में $AB \parallel CD \parallel EF$

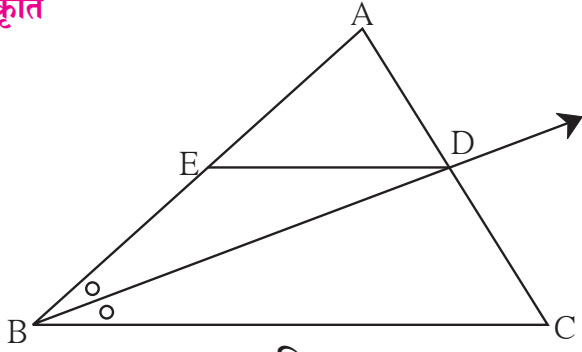
यदि $AC = 5.4$, $CE = 9$, $BD = 7.5$ तो चौखटों को भरकर DF का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $AB \parallel CD \parallel EF$

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF} \dots\dots (\dots)$$

$$\frac{5.4}{9} = \frac{7.5}{DF} \therefore DF = \dots$$

कृति



आकृति 1.32

ΔABC में किरण BD यह $\angle ABC$ की समद्विभाजक है। रेख A-D-C, रेख $DE \parallel$ भुजा BC, A-E-B तो सिद्ध कीजिए कि, $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EB}$

उपपत्ति : ΔABC में किरण BD यह $\angle B$ की समद्विभाजक है।

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \dots\dots\dots (\text{कोण समद्विभाजक प्रमेय}) \dots\dots\dots (I)$$

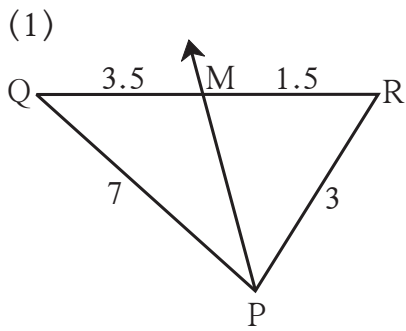
ΔABC में $DE \parallel BC$

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} \dots\dots\dots (\text{[]}) \dots\dots\dots (II)$$

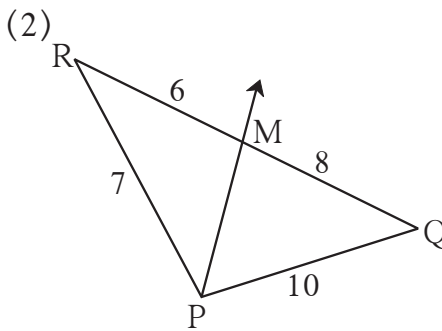
$$\frac{AB}{\text{[]}} = \frac{\text{[]}}{EB} \dots\dots\dots (I) \text{ तथा } (II) \text{ से}$$

प्रश्नसंग्रह 1.2

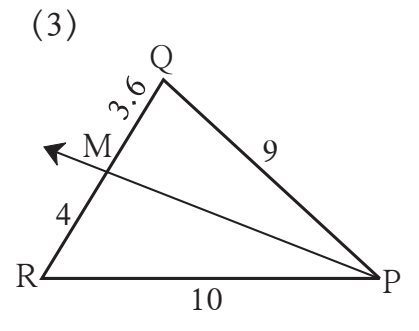
1. नीचे कुछ त्रिभुज और उनके रेखाखंडों की लंबाई दी गई है। इस आधार पर पहचानिए कि किस आकृति में किरण PM यह $\angle QPR$ की समद्विभाजक है।



आकृति 1.33

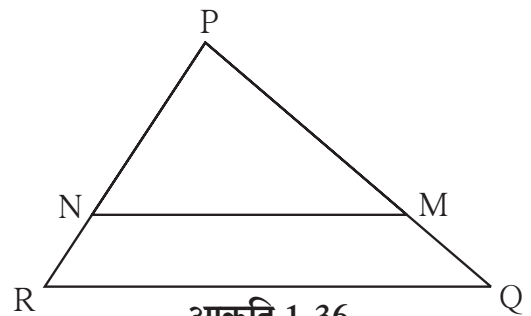


आकृति 1.34



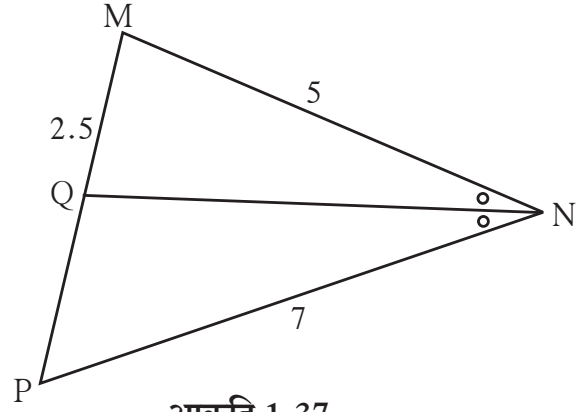
आकृति 1.35

2. ΔPQR में $PM = 15$, $PQ = 25$, $PR = 20$, $NR = 8$ तो बताइए रेख NM भुजा RQ के समांतर है क्या? कारण लिखिए।

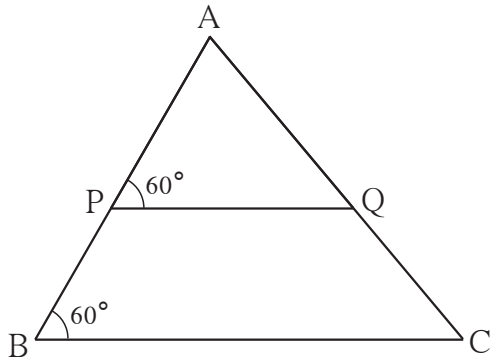


आकृति 1.36

3. ΔMNP में रेख NQ यह $\angle N$ की समद्विभाजक है। यदि $MN = 5$, $PN = 7$, $MQ = 2.5$ तो QP का मान ज्ञात कीजिए।

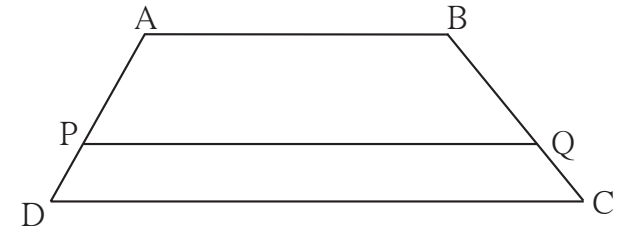


आकृति 1.37

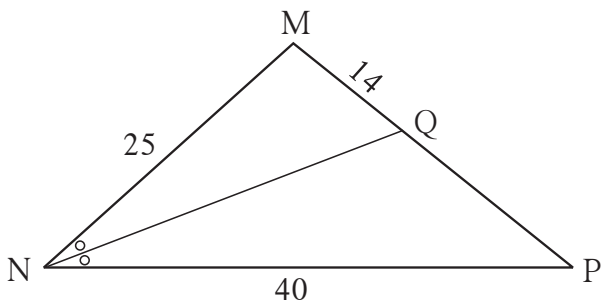


आकृति 1.38

5. समलंब चतुर्भुज ABCD में, भुजा $AB \parallel$ भुजा $PQ \parallel$ भुजा DC , यदि $AP = 15$, $PD = 12$, $QC = 14$ तो BQ का मान ज्ञात कीजिए।



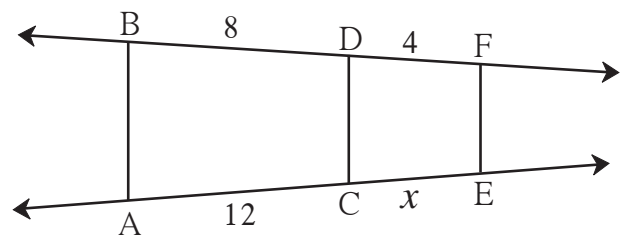
आकृति 1.39



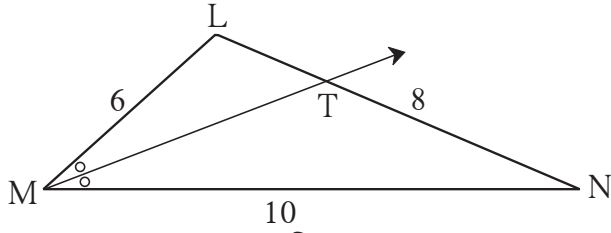
आकृति 1.40

6. आकृति 1.40 में दी गई जानकारी के आधार पर QP का मान ज्ञात कीजिए।

7. संलग्न आकृति 1.41 में $AB \parallel CD \parallel FE$ तो x तथा AE का मान ज्ञात कीजिए।



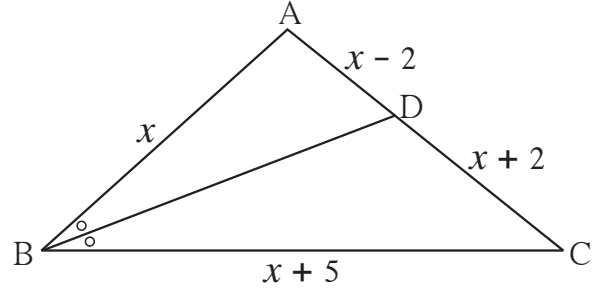
आकृति 1.41



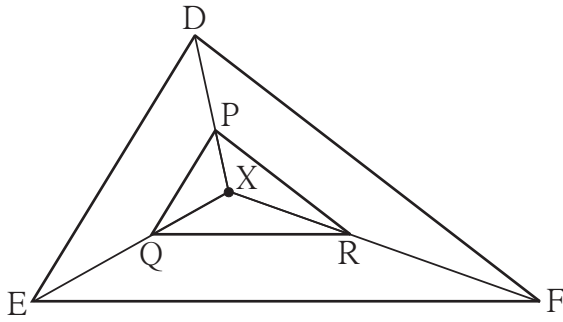
आकृति 1.42

9. ΔABC में रेखा BD यह $\angle ABC$ की समद्विभाजक है, यदि $AB = x$, $BC = x + 5$
 $AD = x - 2$, $DC = x + 2$
तो x का मान ज्ञात कीजिए।

8. ΔLMN में किरण MT यह $\angle LMN$ की समद्विभाजक है।
 $LM = 6$, $MN = 10$, $TN = 8$ तो LT का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 1.43



आकृति 1.44

10. संलग्न आकृति 1.44 में त्रिभुज के अंतःभाग में स्थित एक बिंदु X है। बिंदु X को त्रिभुज के शीर्षबिंदुओं से जोड़ा गया है। इसी प्रकार रेखा $PQ \parallel$ रेखा DE , रेखा $QR \parallel$ रेखा EF , तो रेखा $PR \parallel$ रेखा DF को सिद्ध करने के लिए निम्नलिखित चौखटों को पूरा कीजिए।

उपपत्ति : ΔXDE में $PQ \parallel DE$

.....

$$\therefore \frac{XP}{\text{.....}} = \frac{\text{.....}}{QE}$$

..... (I) (समानुपात का मूलभूत प्रमेय)

ΔXEF में $QR \parallel EF$

.....

$$\therefore \frac{\text{.....}}{\text{.....}} = \frac{\text{.....}}{\text{.....}}$$

.....(II)

$$\therefore \frac{\text{.....}}{\text{.....}} = \frac{\text{.....}}{\text{.....}}$$

..... कथन (I) तथा (II) से

\therefore रेखा $PR \parallel$ रेखा DF

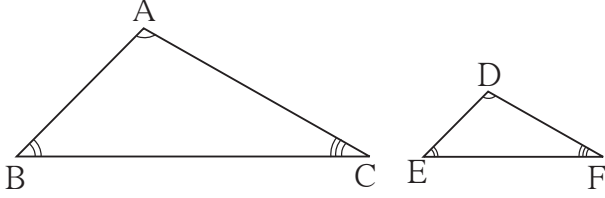
..... (समानुपात के मूलभूत प्रमेय का विलोम)

- 11*. ΔABC में $AB = AC$, $\angle B$ तथा $\angle C$ के समद्विभाजक भुजा AC तथा भुजा BC को क्रमशः बिंदु D तथा E पर प्रतिच्छेदित करते हैं। तो सिद्ध कीजिए कि रेखा $ED \parallel$ रेखा BC



थोड़ा याद करें

समरूप त्रिभुज (Similar triangles)



आकृति 1.45

ΔABC तथा ΔDEF में यदि $\angle A \cong \angle D$,

$\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$

और $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

तो ΔABC तथा ΔDEF यह त्रिभुज समरूप होते हैं।

ΔABC तथा ΔDEF समरूप है इसे $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ के रूप में लिखा जाता है।



आओ जानें

त्रिभुजों की समरूपता की कसौटियाँ (Tests for similarity of triangles)

दो त्रिभुज समरूप हों इसके लिए उनकी तीनों संगतभुजाएँ समानुपात में हों और तीनों संगत कोणों का सर्वांगसम होना अनिवार्य होता है। परंतु इन छह शर्तों में से किसी भी तीन विशिष्ट शर्तों की पूर्ति हो जाने पर शेष सभी शर्तें अपने आप पूरी हो जाती हैं। अर्थात् दो त्रिभुजों के समरूप होने लिए कोई भी तीन विशिष्ट शर्तें ही पर्याप्त होती हैं। इन तीनों शर्तों को जाँच कर यह निश्चित किया जा सकता है कि दिए गए दोनों त्रिभुज समरूप हैं। इन पर्याप्त शर्तों को 'समरूपता की कसौटी' कहते हैं। अर्थात् वे दो त्रिभुज समरूप हैं यह निश्चित करने के लिए उन विशिष्ट शर्तों को खोजना पर्याप्त होता है।

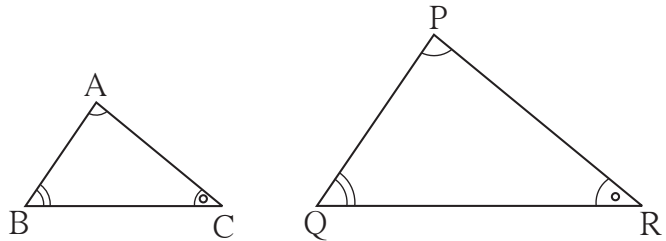
समरूपता की कोकोको कसौटी (AAA test for similarity of triangles)

दो त्रिभुजों के शीर्षबिंदुओं की दी गई एकैकी संगति के अनुसार बनने वाले तीनों संगत कोण यदि सर्वांगसम हों तो वे दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

ΔABC तथा ΔPQR में $ABC \leftrightarrow PQR$

इस संगति में यदि $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$,

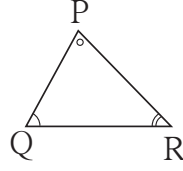
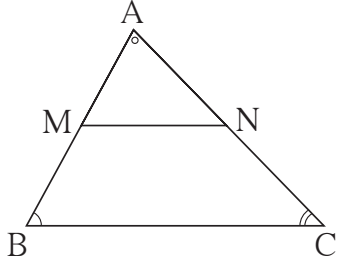
$\angle C \cong \angle R$ तो $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.



आकृति 1.46

अधिक जानकारी हेतु :

कोकोको कसौटी की उपपत्ति



दत्त : ΔABC तथा ΔPQR में,
 $\angle A \cong \angle P, \angle B \cong \angle Q,$
 $\angle C \cong \angle R.$

साध्य : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

आकृति 1.47

उपपत्ति : माना ΔABC यह ΔPQR से बड़ा है। अब AB पर बिंदु M, AC पर बिंदु N इसप्रकार लीजिए कि, $AM = PQ$ और $AN = PR$ । इस आधारपर दिखाइए कि,

$\Delta AMN \cong \Delta PQR$ । इस आधारपर $MN \parallel BC$ दिखा सकते हैं।

अब समानुपात के मूलभूत प्रमेय का उपयोग कर $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

अर्थात्, $\frac{MB}{AM} = \frac{NC}{AN}$ (विपर्यस्थानुपात की क्रिया से)

$\frac{MB + AM}{AM} = \frac{NC + AN}{AN}$ (योगानुपात की क्रिया से)

$$\therefore \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$$

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$ इसी प्रकार $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ यह दिखा सकते हैं।

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ मिलता है। $\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$

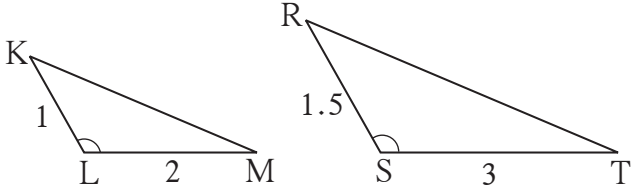
समरूप त्रिभुजों की कोको कसौटी (A A test for similarity of triangles)

दो त्रिभुजों के शीर्ष बिंदुओं की दी गई किसी एकैकी संगति के अनुसार एक त्रिभुज के दो कोण यदि दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों के सर्वांगसम हों तो पहले त्रिभुज का तीसरा कोण दूसरे त्रिभुज के तीसरे कोण के सर्वांगसम होता है, यह हमें ज्ञात है।

इसलिए किसी एक त्रिभुज के दोनों कोण दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों के सर्वांगसम हों तो यह शर्त दो त्रिभुजों के समरूप होने के लिए पर्याप्त होती है। इस शर्त को समरूपता की कोको कसौटी कहते हैं।

समरूपता की भु को भु कसौटी (SAS test for similarity of triangles)

दो त्रिभुजों के शीर्षबिंदुओं की दी गई किसी एकैकी संगति के अनुसार यदि उनकी संगत भुजाओं की दो जोड़ियाँ समानुपात में हों और उन भुजाओं में समाविष्ट कोण सर्वांगसम हों तो वे दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं। समरूपता की इस कसौटी को भुकोभु कसौटी कहते हैं।



आकृति 1.48

उदाहरणार्थ, ΔKLM तथा ΔRST में

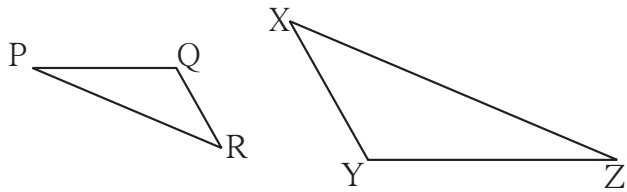
यदि $\angle KLM \cong \angle RST$

$$\frac{KL}{RS} = \frac{LM}{ST}$$

तो $\Delta KLM \sim \Delta RST$

समरूपता की भु भु भु कसौटी (SSS test for similarity of triangles)

दो त्रिभुजों के शीर्षबिंदुओं की दी गई किसी एकैकी संगति के अनुसार जब एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के समानुपात में हो तो वे त्रिभुज समरूप होते हैं। समरूपता की इस कसौटी को भु भु भु कसौटी कहते हैं।



आकृति 1.49

उदाहरणार्थ, ΔPQR तथा ΔXYZ में यदि

$$\frac{PQ}{YZ} = \frac{QR}{XY} = \frac{PR}{XZ}$$

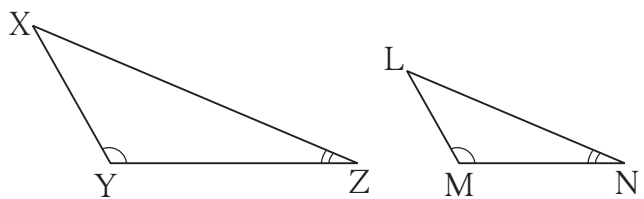
तो $\Delta PQR \sim \Delta ZYX$

समरूप त्रिभुजों के गुणधर्म :

- (1) $\Delta ABC \sim \Delta ABC$ - परावर्तकता (Reflexivity)
- (2) यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ तो $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ - सममिति (Symmetry)
- (3) यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ तथा $\Delta DEF \sim \Delta GHI$ तो $\Delta ABC \sim \Delta GHI$ - संक्रामकता (Transitivity)

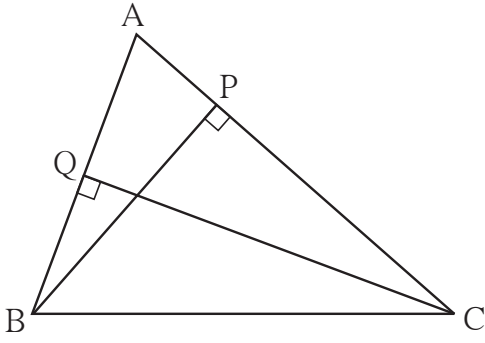
हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) ΔXYZ में $\angle Y = 100^\circ$,
 $\angle Z = 30^\circ$,
 ΔLMN में $\angle M = 100^\circ$,
 $\angle N = 30^\circ$, तो क्या ΔXYZ तथा
 ΔLMN समरूप है? यदि हों तो किस
कसौटी के अनुसार?



आकृति 1.50

उदा. (4)

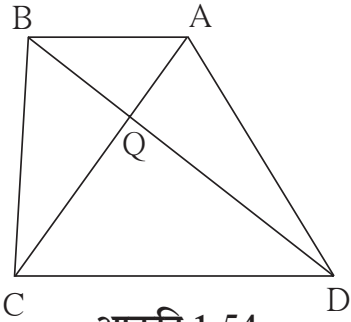


आकृति 1.53

संलग्न आकृति में $BP \perp AC$, $CQ \perp AB$, $A-P-C$, $A-Q-B$, तो सिद्ध कीजिए कि ΔAPB तथा ΔAQC समरूप हैं।

हल : ΔAPB तथा ΔAQC में
 $\angle APB = \square^\circ$ (I)
 $\angle AQC = \square^\circ$ (II)
 $\therefore \angle APB \cong \angle AQC \dots$ (I) और (II) से
 $\angle PAB \cong \angle QAC \dots$ (\square)
 $\therefore \Delta APB \sim \Delta AQC \dots$ को को कसौटी

उदा. (5) यदि चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिंदु Q पर प्रतिच्छेदित करते हों और $2QA = QC$ तथा $2QB = QD$. तो सिद्ध कीजिए कि, $DC = 2AB$ ।



आकृति 1.54

दत्त : $2QA = QC$
 $2QB = QD$
 साध्य : $CD = 2AB$

उपपत्ति : $2QA = QC \therefore \frac{QA}{QC} = \frac{1}{2}$ (I)

$2QB = QD \therefore \frac{QB}{QD} = \frac{1}{2}$ (II)

$\therefore \frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD}$ (I) तथा (II) से

ΔAQB तथा ΔCQD में

$\frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD}$ (सिद्ध किया है।)

$\angle AQB \cong \angle DQC$ (शीर्षाभिमुख कोण)

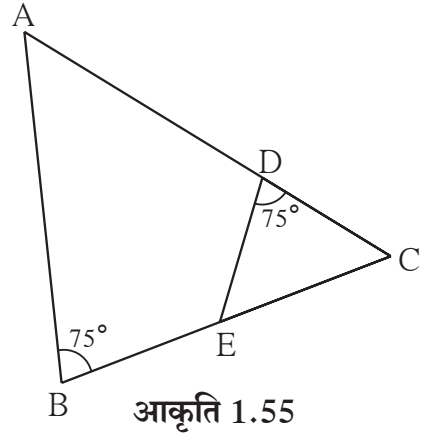
$\therefore \Delta AQB \sim \Delta CQD$ (समरूपता की भु को भु कसौटी)

परंतु $\frac{AQ}{CQ} = \frac{QB}{QD} = \frac{AB}{CD}$ (संगत भुजाएँ समानुपात में)

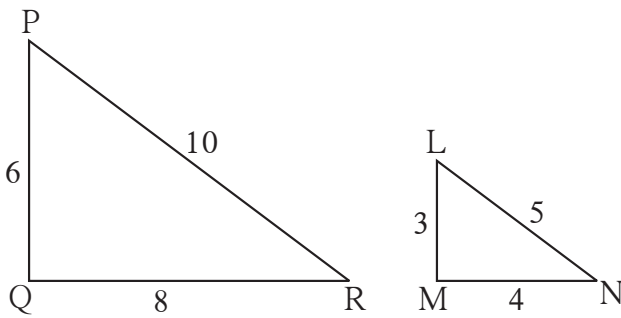
$\therefore \frac{AQ}{CQ} = \frac{1}{2} \therefore \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$

$\therefore 2AB = CD$

1. आकृति 1.55 में $\angle ABC = 75^\circ$,
 $\angle EDC = 75^\circ$ तो इनमें दो त्रिभुज किस कसौटी
 के अनुसार समरूप हैं ?
 उनकी समरूपता की एकैकी संगति लिखिए ।



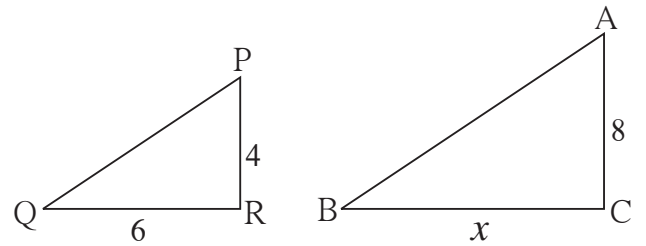
आकृति 1.55



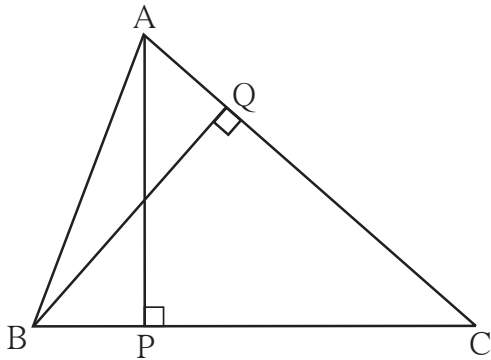
आकृति 1.56

2. संलग्न आकृति 1.56 में, दिए गए त्रिभुज क्या
 समरूप हैं ? यदि हाँ तो किस कसौटी के अनुसार ?

3. आकृति 1.57 में दर्शाए अनुसार 8 मीटर तथा 4
 मीटर ऊँचाईवाले दो खंभे समतल जमीन पर खड़े हैं ।
 सूर्य के प्रकाश से छोटे खंभे की परछाई 6 मीटर
 होती हो तो उसी समय बड़े खंभे की परछाई की
 लंबाई कितनी होगी ?



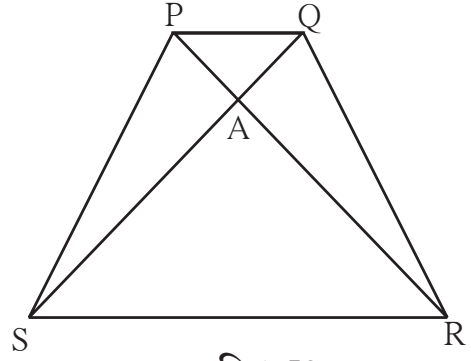
आकृति 1.57



आकृति 1.58

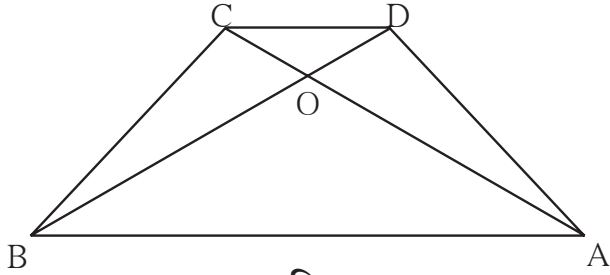
4. ΔABC में $AP \perp BC$, $BQ \perp AC$
 $B-P-C$, $A-Q-C$ तो सिद्ध कीजिए कि
 $\Delta CPA \sim \Delta CQB$ ।
 यदि $AP = 7$, $BQ = 8$, $BC = 12$
 तो AC का मान ज्ञात कीजिए ।

5. संलग्न आकृति में $\square PQRS$ एक समलंब चतुर्भुज है। जिसमें भुजा $PQ \parallel$ भुजा SR , $AR = 5AP$, $AS = 5AQ$ तो सिद्ध कीजिए कि,
 $SR = 5PQ$



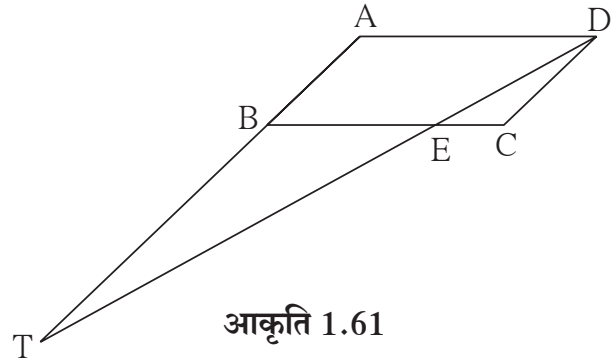
आकृति 1.59

6. समलंब चतुर्भुज ABCD में,
 भुजा $AB \parallel$ भुजा DC विकर्ण AC तथा विकर्ण BD परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेदित करते हैं। यदि $AB = 20$, $DC = 6$, $OB = 15$ तो OD का मान ज्ञात कीजिए।



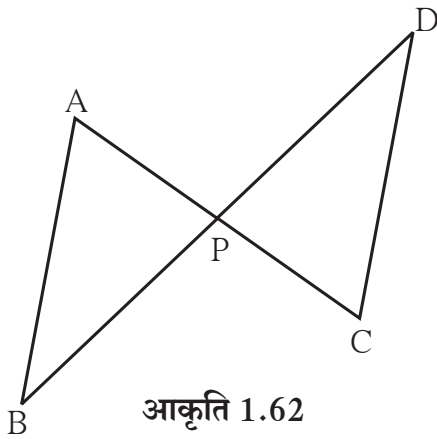
आकृति 1.60

7. $\square ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज है। भुजा BC पर E कोई एक बिंदु है ; रेखा DE रेखा AB को बिंदु T पर प्रतिच्छेदित करती है। तो सिद्ध कीजिए कि $DE \times BE = CE \times TE$ ।



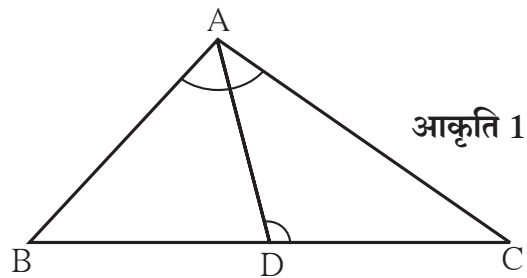
आकृति 1.61

8. संलग्न आकृति में रेखा AC तथा रेखा BD परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं और $\frac{AP}{CP} = \frac{BP}{DP}$ तो सिद्ध कीजिए कि, $\triangle ABP \sim \triangle CDP$



आकृति 1.62

9. संलग्न आकृति में $\triangle ABC$ में बिंदु D यह भुजा BC पर इस प्रकार है, कि $\angle BAC = \angle ADC$ तो सिद्ध कीजिए कि, $CA^2 = CB \times CD$



आकृति 1.63

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $A(\Delta ABC) = 16$, $A(\Delta PQR) = 25$ तो $\frac{AB}{PQ}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2} \dots\dots\dots (\text{समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।})$$

$$\therefore \frac{16}{25} = \frac{AB^2}{PQ^2} \quad \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{4}{5} \dots\dots\dots (\text{वर्गमूल ज्ञात करनेपर})$$

उदा. (2) दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात 2:5 है, छोटे त्रिभुज का क्षेत्रफल 64 वर्ग सेमी हो तो बड़े त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ?

हल : माना $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ।

माना ΔABC छोटा त्रिभुज तथा ΔPQR बड़ा त्रिभुज है।

$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{(2)^2}{(5)^2} = \frac{4}{25} \dots\dots\dots (\text{समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात})$$

$$\therefore \frac{64}{A(\Delta PQR)} = \frac{4}{25}$$

$$4 \times A(\Delta PQR) = 64 \times 25$$

$$A(\Delta PQR) = \frac{64 \times 25}{4} = 400$$

\therefore बड़े त्रिभुज का क्षेत्रफल = 400 वर्ग सेमी

उदा. (3) समलंब चतुर्भुज ABCD में भुजा AB \parallel भुजा CD, विकर्ण AC तथा विकर्ण BD परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं तो सिद्ध कीजिए कि, $\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$

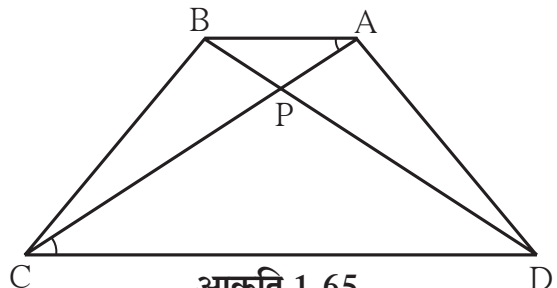
हल : समलंब चतुर्भुज ABCD में भुजा AB \parallel भुजा CD

ΔAPB तथा ΔCPD में

$\angle PAB \cong \angle PCD \dots\dots$ (एकांतर कोण)

$\angle APB \cong \angle CPD \dots\dots$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\therefore \Delta APB \sim \Delta CPD \dots\dots$ (को को कसौटी)



$$\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2} \dots\dots\dots (\text{समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का प्रमेय})$$

1. दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात 3:5 हो तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए ।
2. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ और $AB : PQ = 2 : 3$ तो निम्नलिखित रिक्त चौखटों को पूरा कीजिए ।

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{\square} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{\square}{\square}$$

3. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $A(\Delta ABC) = 80$, $A(\Delta PQR) = 125$ तो निम्नलिखित रिक्त चौखटों को पूरा कीजिए ।

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta \square)} = \frac{80}{125} = \frac{\square}{\square} \quad \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{\square}{\square}$$

4. $\Delta LMN \sim \Delta PQR$, $9 \times A(\Delta PQR) = 16 \times A(\Delta LMN)$, यदि $QR = 20$ तो MN का मान ज्ञात कीजिए ।
5. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल 225 वर्ग सेमी तथा 81 वर्ग सेमी है । यदि छोटे त्रिभुज की एक भुजा की लंबाई 12 सेमी हो तो बड़े त्रिभुज की संगत भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए ।
6. समबाहु ΔABC तथा ΔDEF में $A(\Delta ABC) : A(\Delta DEF) = 4 : 7$ $AB = 4$ तो DE की लंबाई ज्ञात कीजिए ।
7. आकृति 1.66 में रेख $PQ \parallel$ रेख DE यदि $A(\Delta PQF) = 20$ वर्ग इकाई, $PF = 2 DP$ है, तो $A(\square DPQE)$ ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित कृति पूर्ण कीजिए ।

$$A(\Delta PQF) = 20 \text{ वर्ग इकाई, } PF = 2 DP, \text{ माना } DP = x \quad \therefore PF = 2x$$

$$DF = DP + \square = \square + \square = 3x$$

ΔFDE तथा ΔFPQ में ।

$$\angle FDE \cong \angle \square \text{ (संगत कोण)}$$

$$\angle FED \cong \angle \square \text{ (संगत कोण)}$$

$\therefore \Delta FDE \sim \Delta FPQ \dots\dots\dots$ (को को कसौटी)

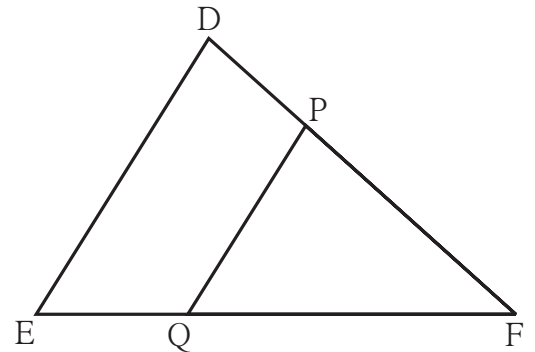
$$\therefore \frac{A(\Delta FDE)}{A(\Delta FPQ)} = \frac{\square}{\square} = \frac{(3x)^2}{(2x)^2} = \frac{9}{4}$$

$$A(\Delta FDE) = \frac{9}{4} A(\Delta FPQ) = \frac{9}{4} \times \square = \square$$

$$A(\square DPQE) = A(\Delta FDE) - A(\Delta FPQ)$$

$$= \square - \square$$

$$= \square$$



आकृति 1.66

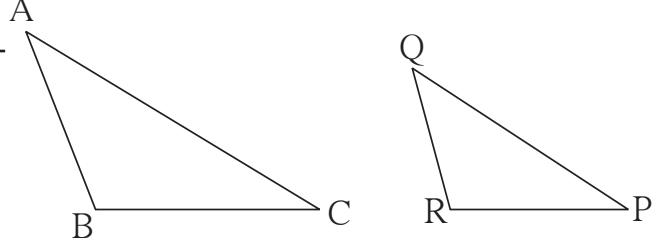
1. निम्नलिखित उपप्रश्नों के पर्यायी उत्तर दिए गए हैं। इनमें से सही पर्याय चुनिए।

(1) यदि ΔABC तथा ΔPQR में किसी

एकैकी संगति से यदि $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{CA}{PQ}$

तो निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं?

- (A) $\Delta PQR \sim \Delta ABC$
 (B) $\Delta PQR \sim \Delta CAB$
 (C) $\Delta CBA \sim \Delta PQR$
 (D) $\Delta BCA \sim \Delta PQR$



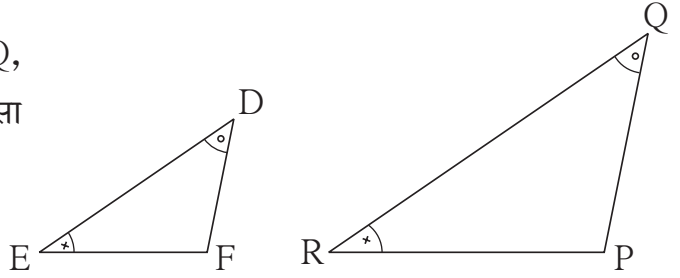
आकृति 1.67

(2) यदि ΔDEF तथा ΔPQR में $\angle D \cong \angle Q$,

$\angle R \cong \angle E$ तो निम्नलिखित में से कौन-सा

कथन सत्य है ?

- (A) $\frac{EF}{PR} = \frac{DF}{PQ}$ (B) $\frac{DE}{PQ} = \frac{EF}{RP}$
 (C) $\frac{DE}{QR} = \frac{DF}{PQ}$ (D) $\frac{EF}{RP} = \frac{DE}{QR}$



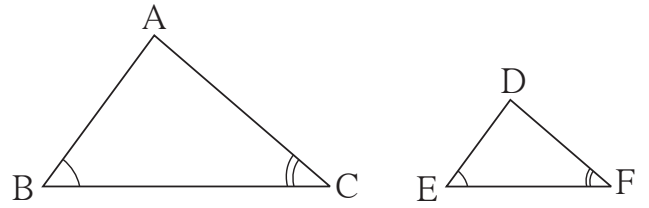
आकृति 1.68

(3) ΔABC तथा ΔDEF में $\angle B = \angle E$,

$\angle F = \angle C$ और $AB = 3 DE$, तो इन

दोनों त्रिभुजों के लिए कौन-सा कथन सत्य है?

- (A) दोनों त्रिभुज सर्वांगसम और समरूप नहीं हैं।
 (B) दोनों त्रिभुज समरूप हैं परंतु सर्वांगसम नहीं हैं।
 (C) दोनों त्रिभुज सर्वांगसम और समरूप दोनों हैं।
 (D) उपर्युक्त में से कोई भी कथन सत्य नहीं है।



आकृति 1.69

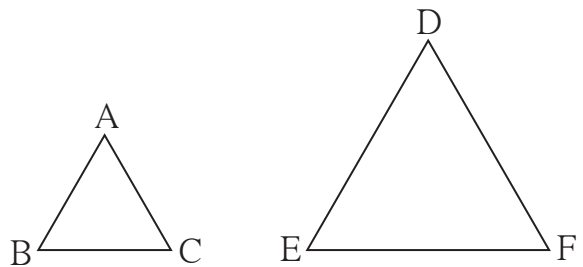
(4) समबाहु ΔABC तथा ΔDEF में,

$A(\Delta ABC) : A(\Delta DEF) = 1 : 2$

होनेपर $AB = 4$ हो तो DE की लंबाई

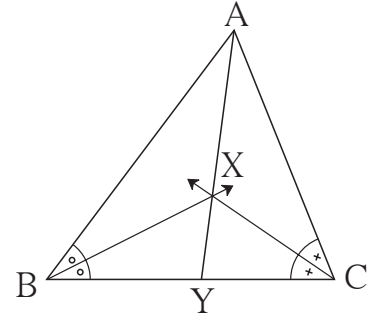
कितनी ?

- (A) $2\sqrt{2}$ (B) 4 (C) 8 (D) $4\sqrt{2}$

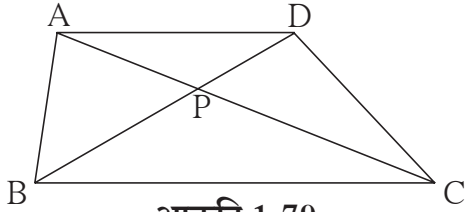


आकृति 1.70

10. आकृति 1.78 ΔABC में $\angle B$ तथा $\angle C$ के समद्विभाजक परस्पर एक दूसरे को बिंदु X पर प्रतिच्छेदित करते हैं। रेखा AX यह भुजा BC को बिंदु Y पर प्रतिच्छेदित करती है; यदि $AB = 5$, $AC = 4$, $BC = 6$ तो $\frac{AX}{XY}$ का मान ज्ञात कीजिए।



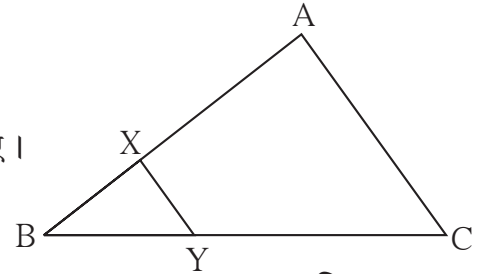
आकृति 1.78



आकृति 1.79

11. $\square ABCD$ में रेखा $AD \parallel$ रेखा BC . विकर्ण AC और विकर्ण BD परस्पर एक दूसरे को बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं। तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{BP}$

12. आकृति 1.80 में रेखा $XY \parallel$ भुजा AC. यदि $2AX = 3BX$ और $XY = 9$ तो AC का मान ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित कृति पूर्ण कीजिए।



आकृति 1.80

कृति : $2AX = 3BX \therefore \frac{AX}{BX} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{AX+BX}{BX} = \frac{\square + \square}{\square}$ (योगानुपात की क्रिया से)

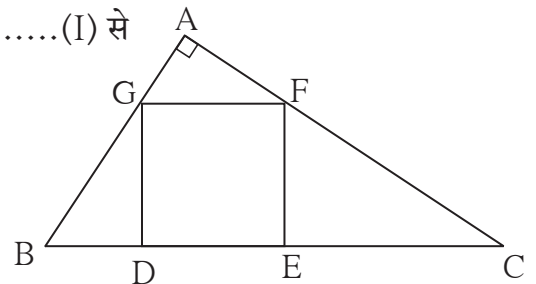
$\frac{AB}{BX} = \frac{\square}{\square}$ (I)

$\Delta BCA \sim \Delta BYX$ (समरूपता की \square कसौटी)

$\therefore \frac{BA}{BX} = \frac{AC}{XY}$ (समरूप त्रिभुजों की संगत भुजा)

$\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{AC}{9} \therefore AC = \square$ (I) से

- 13*. आकृति 1.81 में $\square DEFG$ एक वर्ग है। ΔABC में $\angle A = 90^\circ$, बिंदु F भुजा AC पर स्थित है। तो सिद्ध कीजिए कि, $DE^2 = BD \times EC$ (ΔGBD तथा ΔCFE को समरूप दिखाइए और $GD = FE = DE$ का उपयोग कीजिए।)



आकृति 1.81



2

पायथागोरस का प्रमेय



आओ सीखें

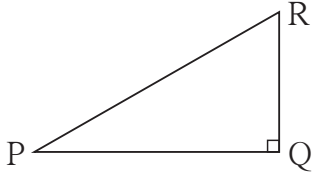
- पायथागोरस का त्रिक
- ज्यामितीय माध्य का प्रमेय
- पायथागोरस के प्रमेय का उपयोजन
- समकोण त्रिभुजों की समरूपता
- पायथागोरस का प्रमेय
- अपोलोनियस का प्रमेय



थोड़ा याद करें

पायथागोरस का प्रमेय :

समकोण त्रिभुज में, कर्ण का वर्ग, अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है ।



आकृति 2.1

आकृति 2.1 देखिए ΔPQR में $\angle PQR = 90^\circ$

$$l(PR)^2 = l(PQ)^2 + l(QR)^2$$

इसे हम $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ ऐसा लिखेंगे ।

ΔPQR में भुजा PQ, QR तथा PR की लंबाई क्रमशः r, p और q इन चिन्हों से दर्शाई जाती है । इस प्रकार आकृति 2.1 के संदर्भ में पायथागोरस के प्रमेय को $q^2 = p^2 + r^2$ ऐसा भी लिखा जा सकता है।

पायथागोरस के त्रिक :

प्राकृत संख्याओं के त्रिक में यदि बड़ी संख्या का वर्ग अन्य दो संख्याओं के वर्गों के योगफल के बराबर हो तो उन्हें पायथागोरस का त्रिक कहते हैं ।

उदाहरणार्थ : (11, 60, 61) इन संख्याओं के त्रिक में,

$$11^2 = 121, \quad 60^2 = 3600, \quad 61^2 = 3721 \quad \text{और} \quad 121 + 3600 = 3721$$

यहाँ पर बड़ी संख्या का वर्ग अन्य दो संख्याओं के वर्गों के योगफल के बराबर है ।

\therefore 11, 60, 61 यह 'पायथागोरस का त्रिक' है ।

उसी प्रकार (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (24, 25, 7) भी पायथागोरस के त्रिक हैं, इसकी जाँच करें ।

'पायथागोरस के त्रिक' की संख्याओं को किसी भी क्रम से लिखा जा सकता है ।

पायथागोरस का प्रमेय (Theorem of Pythagoras)

समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है।

दत्त : ΔABC में, $\angle ABC = 90^\circ$

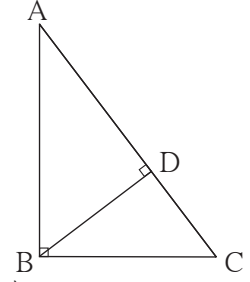
साध्य : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना : बिंदु B से भुजा AC पर एक लंब BD

खींचिए A-D-C

उपपत्ति : समकोण ΔABC में रेखा $BD \perp$ कर्ण AC (रचना)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta ADB \sim \Delta BDC$ (समकोण त्रिभुजों की समरूपता) आकृति 2.7



$\Delta ABC \sim \Delta ADB$

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DB} = \frac{AC}{AB}$ - (समरूप त्रिभुजों की संगतभुजाएँ)

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$

$AB^2 = AD \times AC$ (I)

(I) तथा (II) का योग करनेपर

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 &= AD \times AC + DC \times AC \\ &= AC (AD + DC) \\ &= AC \times AC \text{ (A-D-C)} \end{aligned}$$

$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$

इसीप्रकार, $\Delta ABC \sim \Delta BDC$

$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$ - (समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)

$\therefore \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$

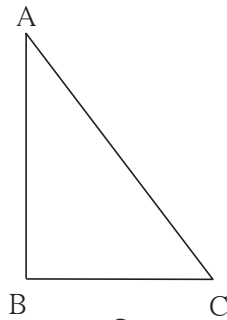
$BC^2 = DC \times AC$ (II)

पायथागोरस के प्रमेय का विलोम (Converse of Pythagoras theorem)

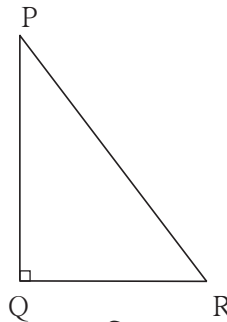
यदि किसी त्रिभुज में एक भुजा का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है, तो वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है।

दत्त : ΔABC में, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

साध्य : $\angle ABC = 90^\circ$



आकृति 2.8



आकृति 2.9

रचना : ΔPQR इसप्रकार खींचिए कि, $AB = PQ$, $BC = QR$, $\angle PQR = 90^\circ$.

उपपत्ति : ΔPQR में, $\angle Q = 90^\circ$

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2 \quad \dots\dots\dots (\text{पायथागोरस का प्रमेय})$$

$$= AB^2 + BC^2 \quad \dots\dots\dots (\text{रचना})$$

$$= AC^2 \quad \dots\dots\dots (\text{दत्त})$$

$$\therefore PR^2 = AC^2,$$

$$\therefore PR = AC$$

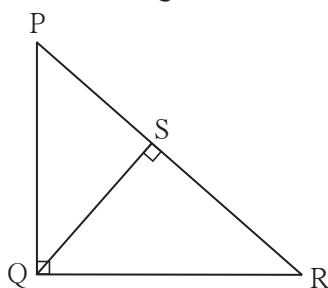
$$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR \quad \dots\dots\dots (\text{भु भु भु कसौटी})$$

$$\therefore \angle ABC = \angle PQR = 90^\circ$$



इसे ध्यान में रखें

(1) (a) समकोण त्रिभुजों की समरूपता



आकृति 2.10

ΔPQR में $\angle Q = 90^\circ$, रेख $QS \perp$ रेख PR
यहाँ $\Delta PQR \sim \Delta PSQ \sim \Delta QSR$ इसी पद्धति
से आकृति में बनने वाले सभी समकोण त्रिभुज परस्पर
समरूप होते हैं।

(b) ज्यामितीय माध्य का प्रमेय :

उपर्युक्त आकृति में $\Delta PSQ \sim \Delta QSR$

$$\therefore QS^2 = PS \times SR$$

\therefore रेख QS यह रेख PS तथा रेख SR इन रेखाखंडों का ज्यामितीय माध्य है।

(2) पायथागोरस का प्रमेय :

समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है।

(3) पायथागोरस के प्रमेय का विलोम :

यदि किसी त्रिभुज में एक भुजा का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है, तो वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है।

इसके आलावा एक और गुणधर्म अधिक उपयोगी है। उसे भी ध्यान में रखें।

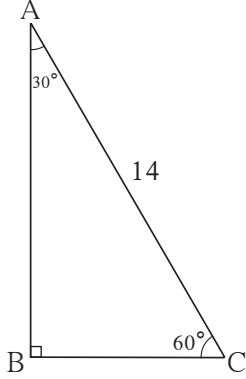
(4) यदि समकोण त्रिभुज में एक भुजा कर्ण की आधी हो तो उस भुजा के सम्मुख कोण 30° होता है।

यह गुणधर्म $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ के प्रमेय का विलोम है।

हल किए हुए उदाहरण

उदा. (1) आकृति 2.11 देखिए। ΔABC में $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $AC = 14$ तो AB तथा BC का मान ज्ञात कीजिए।

हल :



आकृति 2.11

ΔABC में,

$$\angle B = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, \therefore \angle C = 60^\circ$$

$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ के प्रमेयानुसार,

$$BC = \frac{1}{2} \times AC$$

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AC$$

$$BC = \frac{1}{2} \times 14$$

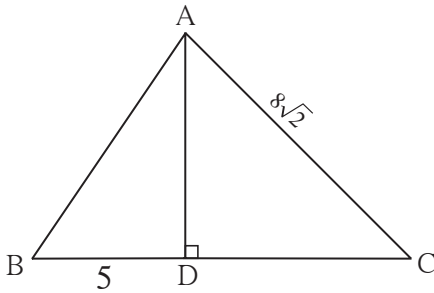
$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 14$$

$$BC = 7$$

$$AB = 7\sqrt{3}$$

उदा. (2) आकृति 2.12 देखिए ΔABC में रेखा $AD \perp$ रेखा BC , $\angle C = 45^\circ$, $BD = 5$ और $AC = 8\sqrt{2}$, तो AD और BC का मान ज्ञात कीजिए।

हल :



आकृति 2.12

ΔADC में,

$$\angle ADC = 90^\circ, \angle C = 45^\circ, \therefore \angle DAC = 45^\circ$$

$$AD = DC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 8\sqrt{2} \dots (\text{45}^\circ - \text{45}^\circ - \text{90}^\circ \text{ के प्रमेयानुसार})$$

$$\therefore DC = 8 \quad \therefore AD = 8$$

$$BC = BD + DC$$

$$= 5 + 8$$

$$= 13$$

उदा. (3) आकृति 2.13 में $\angle PQR = 90^\circ$, रेखा $QN \perp$ रेखा PR , $PN = 9$, $NR = 16$ तो QN ज्ञात कीजिए।

हल : ΔPQR में, रेखा $QN \perp$ रेखा PR

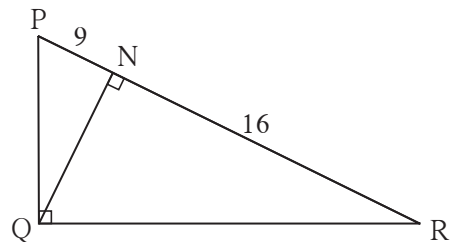
$$\therefore QN^2 = PN \times NR \dots (\text{ज्यामितिय माध्य का प्रमेय})$$

$$\therefore QN = \sqrt{PN \times NR}$$

$$= \sqrt{9 \times 16}$$

$$= 3 \times 4$$

$$= 12$$



आकृति 2.13

उदा. (6) ΔLMN में $l = 5$, $m = 13$, $n = 12$ तो निश्चित कीजिए कि ΔLMN यह समकोण त्रिभुज है या नहीं। ($\angle L$, $\angle M$ और $\angle N$ की सम्मुख भुजाएँ क्रमशः l , m तथा n हैं)

हल : $l = 5$, $m = 13$, $n = 12$
 $l^2 = 25$, $m^2 = 169$, $n^2 = 144$
 $\therefore m^2 = l^2 + n^2$
 \therefore पायथागोरस के प्रमेय के विलोमानुसार ΔLMN समकोण त्रिभुज है।

उदा. (7) आकृति 2.16 देखिए ; ΔABC में, रेखा $AD \perp$ रेखा BC , तो सिद्ध कीजिए :

$$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$$

हल : ΔADC में, पायथागोरस के प्रमेयानुसार

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$\therefore AD^2 = AC^2 - CD^2 \dots (I)$$

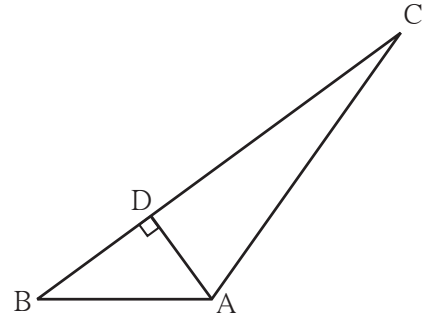
ΔADB में,

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$\therefore AD^2 = AB^2 - BD^2 \dots (II)$$

$$\therefore AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2 \dots \dots \dots [(I) \text{ और } (II) \text{ से}]$$

$$\therefore AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$$



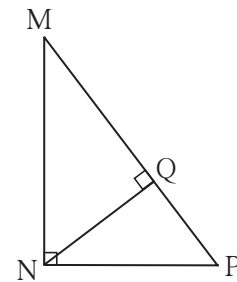
आकृति 2.16

प्रश्नसंग्रह 2.1

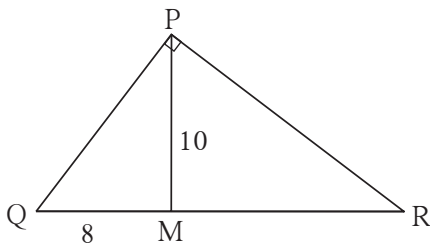
1. नीचे दिए गए त्रिकों में से पायथागोरस के त्रिक पहचानिए। कारण सहित लिखिए।

- (1) (3, 5, 4) (2) (4, 9, 12) (3) (5, 12, 13)
 (4) (24, 70, 74) (5) (10, 24, 27) (6) (11, 60, 61)

2. आकृति 2.17 में $\angle MNP = 90^\circ$,
 रेखा $NQ \perp$ रेखा MP , $MQ = 9$,
 $QP = 4$ तो NQ का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 2.17



आकृति 2.18

3. आकृति 2.18 में $\angle QPR = 90^\circ$,
 रेखा $PM \perp$ रेखा QR और $Q-M-R$,
 $PM = 10$, $QM = 8$ तो QR का मान ज्ञात कीजिए।



आओ जानें

पायथागोरस के प्रमेय का उपयोजन

पायथागोरस के प्रमेय में समकोण त्रिभुज का कर्ण और समकोण बनाने वाली भुजाओं में परस्पर संबंध अर्थात् समकोण की सम्मुख भुजा और अन्य दो भुजाओं में संबंध बताया गया है।

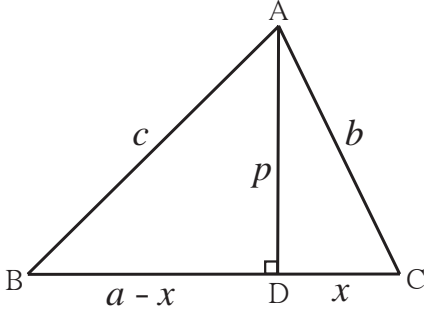
त्रिभुज में न्यूनकोण की सम्मुख भुजा का अन्य दो भुजाओं से संबंध, इसी प्रकार अधिक कोण की सम्मुख भुजा का अन्य दो भुजाओं से संबंध पायथागोरस के प्रमेय से निश्चित किया जाता है। यह संबंध निम्नलिखित उदाहरणों से समझिए।

उदा.(1) ΔABC में, $\angle C$ न्यूनकोण है, रेखा $AD \perp$ रेखा BC तो सिद्ध कीजिए कि :

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$$

दी गई आकृति में, $AB = c$, $AC = b$, $AD = p$, $BC = a$, $DC = x$ माना।

$$\therefore BD = a - x$$



आकृति 2.23

ΔADB में, पायथागोरस के प्रमेयानुसार

$$c^2 = (a-x)^2 + \square$$

$$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + \square \dots\dots\dots (I)$$

ΔADC में, पायथागोरस के प्रमेयानुसार

$$b^2 = p^2 + \square$$

$$p^2 = b^2 - \square \dots\dots\dots (II)$$

(II) में p^2 का मान, (I) में रखनेपर,

$$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$$

$$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$$

उदा.(2) ΔABC में, $\angle ACB$ अधिक कोण है, रेखा $AD \perp$ रेखा BC , तो सिद्ध कीजिए कि :

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$$

मान लीजिए $AD = p$, $AC = b$, $AB = c$,

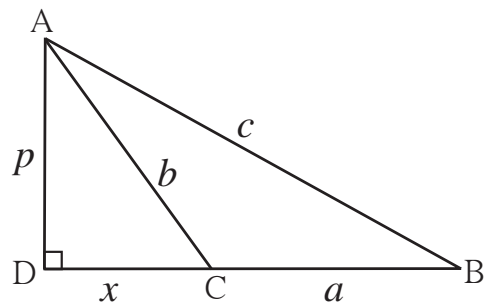
$BC = a$, $DC = x$ (माना)

$$DB = a + x$$

ΔADB में, पायथागोरस के प्रमेयानुसार,

$$c^2 = (a + x)^2 + p^2$$

$$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + p^2 \dots\dots\dots (I)$$



आकृति 2.24

इसी प्रकार ΔADC में,

$$b^2 = x^2 + p^2$$

$$\therefore p^2 = b^2 - x^2 \quad \dots\dots\dots (II)$$

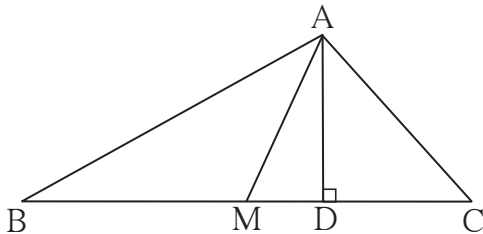
\therefore (I) में (II) के p^2 का मान रखनेपर,

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - x^2 \\ &= a^2 + 2ax + b^2 \end{aligned}$$

$$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$$

अपोलोनियस का प्रमेय (Appollonius' Theorem)

यदि ΔABC में, बिंदु M भुजा BC का मध्य बिंदु हो, तो $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$



आकृति 2.25

दत्त : ΔABC में बिंदु M भुजा BC का मध्यबिंदु है।

साध्य : $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

रचना : रेख $AD \perp$ रेख BC खींचते हैं।

उपपत्ति : यदि रेख AM रेख BC पर लंब नहीं है, तो $\angle AMB$ और $\angle AMC$ में से एक अधिक कोण और दूसरा न्यूनकोण होता है।

आकृति में $\angle AMB$ अधिक कोण और $\angle AMC$ न्यूनकोण है।

उपर्युक्त उदाहरण (1) तथा उदाहरण (2) से,

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 + 2BM \times MD \quad \dots\dots (I)$$

$$\text{और } AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2MC \times MD$$

$$\therefore AC^2 = AM^2 + MB^2 - 2BM \times MD (\because BM = MC) \quad \dots\dots\dots (II)$$

\therefore (I) तथा (II) को जोड़नेपर,

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$$

यदि रेख $AM \perp$ भुजा BC तो इस प्रमेय की उपपत्ति लिखिए।

इस उदाहरण के आधारपर त्रिभुज की भुजा और माधिका में परस्पर संबंध समझा जा सकता है।

इसी को 'अपोलोनियस का प्रमेय' कहते हैं।

हल किए हुए उदाहरण

उदा.(1) आकृति 2.26 ΔPQR में, रेख PM माधिका है $PM = 9$ और $PQ^2 + PR^2 = 290$, तो QR ज्ञात कीजिए।

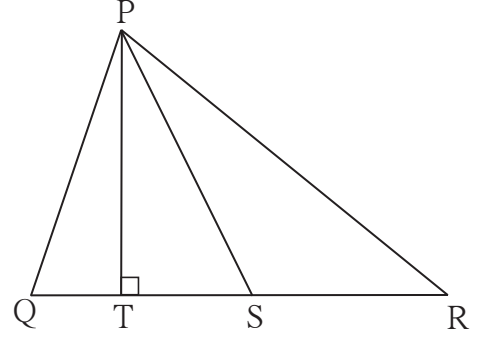
हल : ΔPQR में, रेख PM माधिका है।

बिंदु M रेख QR का मध्यबिंदु है।

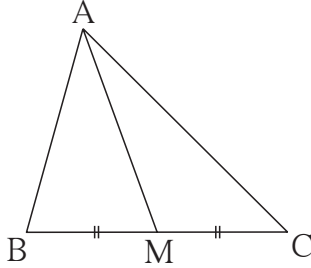
1. ΔPQR में, बिंदु S यह भुजा QR का मध्यबिंदु है, यदि $PQ = 11$, $PR = 17$, $PS = 13$ हो तो QR की लंबाई ज्ञात कीजिए।
2. ΔABC में, $AB = 10$, $AC = 7$, $BC = 9$ तो बिंदु C से भुजा AB पर खींची गई माध्यिका की लंबाई कितनी होगी?
3. आकृति 2.28 में रेख PS यह ΔPQR की माध्यिका है और $PT \perp QR$ तो सिद्ध कीजिए कि,

$$(1) PR^2 = PS^2 + QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$$

$$(2) PQ^2 = PS^2 - QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$$



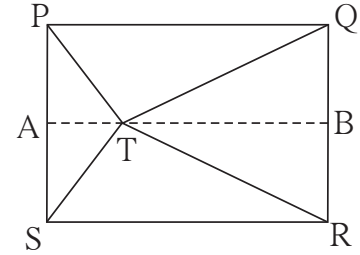
आकृति 2.28



आकृति 2.29

4. आकृति 2.29 में, ΔABC में बिंदु M यह भुजा BC का मध्यबिंदु है, यदि $AB^2 + AC^2 = 290$ सेमी, $AM = 8$ सेमी, तो BC ज्ञात कीजिए।

- 5*. आकृति 2.30 में दर्शाएनुसार बिंदु T यह आयत PQRS के अंतर्भाग में स्थित है। तो सिद्ध कीजिए कि, $TS^2 + TQ^2 = TP^2 + TR^2$
(आकृति में दर्शाएनुसार रेख $AB \parallel$ भुजा SR ऐसा खींचिए कि A-T-B)

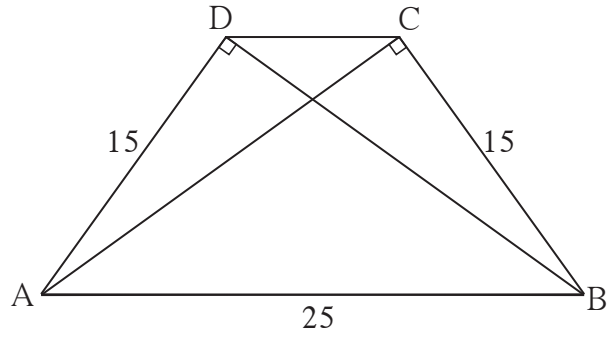


आकृति 2.30

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

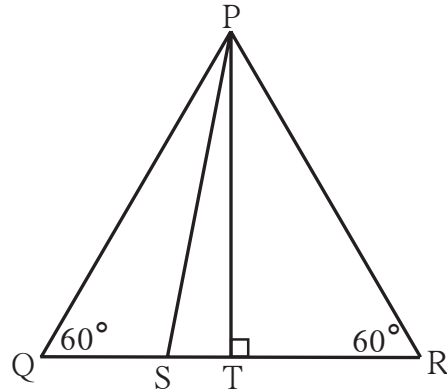
1. निम्नलिखित बहुवैकल्पिक प्रश्नों के दिए गए उत्तरों में से उचित विकल्प चुनकर लिखिए।
 - (1) निम्नलिखित में से कौन-सा पायथागोरस का त्रिक है ?
(A) (1, 5, 10) (B) (3, 4, 5) (C) (2, 2, 2) (D) (5, 5, 2)
 - (2) समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजाओं के वर्गों का योगफल 169 हो तो उसके कर्ण की लंबाई कितनी होगी ?
(A) 15 (B) 13 (C) 5 (D) 12

15. समलंब चतुर्भुज ABCD में,
रेख AB \parallel रेख DC
रेख BD \perp रेख AD,
रेख AC \perp रेख BC,
यदि AD = 15, BC = 15 और AB = 25
हो तो A(□ABCD) का मान कितना होगा?



आकृति 2.34

- 16*. संलग्न आकृति में ΔPQR एक समबाहु त्रिभुज है जिसमें बिंदु S यह रेख QR पर इस प्रकार है कि,
 $QS = \frac{1}{3} QR$ तो सिद्ध कीजिए कि;
 $9 PS^2 = 7 PQ^2$



आकृति 2.35

- 17*. ΔPQR में रेख PM यह माधिका है। यदि $PQ = 40$, $PR = 42$ और $PM = 29$, तो QR की लंबाई ज्ञात कीजिए।
18. ΔABC में रेख AM यह माधिका है। यदि $AB = 22$, $AC = 34$, $BC = 24$, तो AM की लंबाई ज्ञात कीजिए।



ICT Tools or Links

इंटरनेट से 'Story on the life of Pythagoras' की जानकारी प्राप्त कर के Slide show तैयार कीजिए।





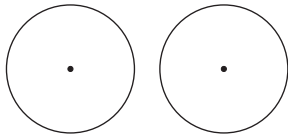
आओ सीखें

- एक, दो तथा तीन बिंदुओं से होकर जाने वाले वृत्त
- स्पर्शवृत्त
- अंतर्लिखित कोण तथा अंतःखंडित चाप
- स्पर्शरेखा छेदनरेखा कोण प्रमेय
- वृत्त की छेदन रेखा तथा स्पर्शरेखा
- वृत्तचाप
- चक्रीय चतुर्भुज
- जीवाओं के प्रतिच्छेदन का प्रमेय

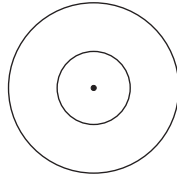


थोड़ा याद करें

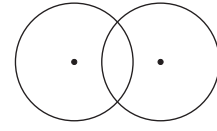
वृत्त के केंद्र, त्रिज्या, व्यास, जीवा, अंतःभाग, बहिर्भाग आदि नामों से आप भलीभाँति परिचित हैं। सर्वांगसम वृत्त, एक केंद्रीय वृत्त तथा परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाले वृत्तों को याद कीजिए।



सर्वांगसम वृत्त



एक केंद्रीय वृत्त



परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाले वृत्त

नौवीं कक्षा में अध्ययन किए हुए जीवा के गुणधर्म को निम्नलिखित कृति की सहायता से याद कीजिए।

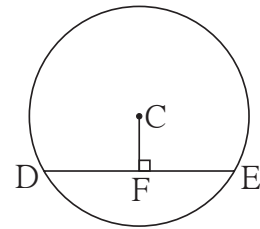
कृति I : संलग्न आकृति में C केंद्रवाले वृत्त में

रेख DE एक जीवा है।

रेख $CF \perp$ जीवा DE, यदि वृत्त का

व्यास 20 सेमी और $DE = 16$ सेमी हो,

तो $CF =$ कितना ?

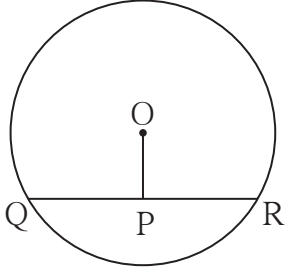


आकृति 3.1

इस प्रश्न को हल करने के लिए उपयोग में आने वाले प्रमेय तथा उसके गुणधर्म को याद करके लिखिए।

- (1) वृत्त के केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब
- (2) _____
- (3) _____

इन गुणधर्मों का उपयोग कर प्रश्न हल कीजिए।



आकृति 3.2

यह प्रश्न हल करने के लिए उपयुक्त प्रमेय लिखिए ।

(1) _____

(2) _____

इन प्रमेयों का उपयोग करके उदाहरण हल कीजिए ।

कृति III : आकृति में वृत्त का केंद्र M तथा

रेख AB व्यास है ।

रेख MS \perp जीवा AD

रेख MT \perp जीवा AC

$\angle DAB \cong \angle CAB$

तो सिद्ध कीजिए; जीवा AD \cong जीवा AC

यह प्रश्न हल करने के लिए निम्नलिखित में से किस प्रमेय का उपयोग करेंगे ?

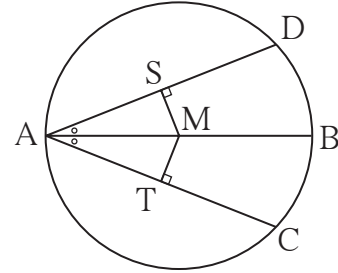
(1) वृत्त की दो जीवाएँ केंद्र से समान दूरी पर हों तो वे परस्पर सर्वांगसम होती हैं ।

(2) एक ही वृत्त की सर्वांगसम जीवाएँ वृत्त के केंद्र से समान दूरी पर होती हैं ।

इनके आलावा त्रिभुजों की सर्वांगसमता की निम्नलिखित में से कौन-सी कसौटी उपयोगी होगी ?

(1) भुकोभु, (2) कोभुको, (3) भुभुभु, (4) कोकोभु, (5) कर्ण-भुजा

उचित कसौटी और प्रमेय का प्रयोग करके उपपत्ति लिखिए ।



आकृति 3.3



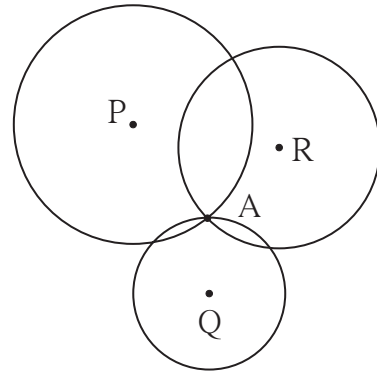
आओ जानें

एक, दो तथा तीन बिंदुओं से होकर जाने वाले वृत्त

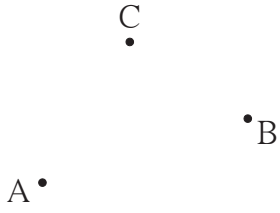
संलग्न आकृति में, किसी एक प्रतल में बिंदु A दर्शाया गया है । केंद्रबिंदु P, Q, R वाले तीन वृत्त बिंदु A से होकर जाते हैं । बिंदु A से जाने वाले ऐसे कितने वृत्त हो सकते हैं ?

यदि आपका उत्तर 'कितने भी' या 'असंख्य' है तो वह सही है ।

एक ही बिंदु से होकर जाने वाले असंख्य वृत्त हो सकते हैं ।



आकृति 3.4



संलग्न आकृति में A और B इन दो भिन्न बिंदुओं से होकर जानेवाले कितने वृत्त होंगे ?

A, B, C इन तीन बिंदुओं से होकर जाने वाले कितने वृत्त होंगे ?

आइए देखें आगे दी गई कृतियों से कोई उत्तर प्राप्त होता है

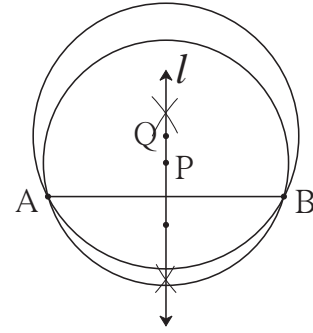
आकृति 3.5

क्या ?

कृति I : बिंदु A और बिंदु B को जोड़ने वाली रेखा AB खींचिए। इस रेखाखंड की लंब समद्विभाजक रेखा l खींचिए। रेखा l पर बिंदु P को केंद्र तथा PA को त्रिज्या मान कर वृत्त खींचिए । देखिए यह वृत्त बिंदु B से भी होकर गुजरता है । इसका कारण बताइए । (लंब समद्विभाजक रेखा का गुणधर्म याद कीजिए ।)

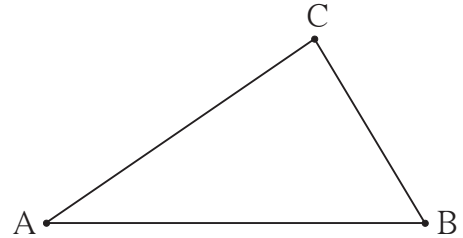
रेखा l पर Q एक और बिंदु लेकर केंद्र Q और त्रिज्या QA लेकर खींचा गया वृत्त भी क्या बिंदु B से होकर जाएगा ? चिंतन कीजिए ।

बिंदु A और बिंदु B से होकर जाने वाले और कितने वृत्त खींचे जा सकेंगे ? उनके केंद्र बिंदु कहाँ होंगे ?



आकृति 3.6

कृति II : नैकरेखीय (अरेखीय) बिंदु A, B, C लीजिए। इन तीनों बिंदुओं से होकर जाने वाले वृत्त खींचिए। इन तीनों बिंदुओं से होकर जाने वाला एक वृत्त और खींचा जा सकेगा क्या ? चिंतन कीजिए ।



आकृति 3.7

कृति III : एकरेखीय बिंदु D, E, F लीजिए । इन तीनों बिंदुओं से होकर जाने वाला वृत्त खींचने का प्रयास कीजिए । यदि वृत्त नहीं खींचा जा सकता तो क्यों ? इसके बारे में विचार कीजिए ।



इसे ध्यान में रखें

- (1) किसी एक बिंदु से होकर जाने वाले असंख्य वृत्त खींचे जा सकते हैं ।
- (2) दो भिन्न बिंदुओं से होकर जाने वाले असंख्य वृत्त होते हैं ।
- (3) तीन नैकरेखीय (अरेखिक) बिंदुओं से होकर जाने वाला एक और केवल एक वृत्त होता है ।
- (4) तीन एकरेखीय बिंदुओं से होकर जाने वाला एक भी वृत्त नहीं खींचा जा सकता ।

स्पर्शरेखा-त्रिज्या प्रमेय (Tangent – radius theorem)

प्रमेय : वृत्त के किसी भी बिंदु से होकर जानेवाली स्पर्शरेखा उस बिंदु को केंद्र से जोड़नेवाली त्रिज्या पर लंब होती है।

अधिक जानकारी हेतू :

दत्त : O केंद्रवाले वृत्त को, एक रेखा l , बिंदु A पर स्पर्श करती है। रेखा OA वृत्त की त्रिज्या है।

साध्य : रेखा $l \perp$ त्रिज्या OA

उपपत्ति : मानो रेखा l रेखा OA पर लंब नहीं है।

मानो बिंदु O से रेखा l पर, OB लंब खींचा गया।

स्वाभाविक रूप से बिंदु B , बिंदु A से भिन्न होना चाहिए। (आकृति 3.11 देखिए)

रेखा l पर बिंदु C इस प्रकार लीजिए कि

$A-B-C$ और $BA = BC$

अब, $\triangle OBC$ और $\triangle OBA$ में,

रेखा $BC \cong$ रेखा BA (रचना)

$\angle OBC \cong \angle OBA$ (प्रत्येक समकोण)

रेखा $OB \cong$ रेखा OB

$\therefore \triangle OBC \cong \triangle OBA$ (भुकोभु कसौटी)

$\therefore OC = OA$

परंतु रेखा OA यह त्रिज्या है, अर्थात्

रेखा OC भी त्रिज्या होगी।

\therefore बिंदु C वृत्त पर स्थित है।

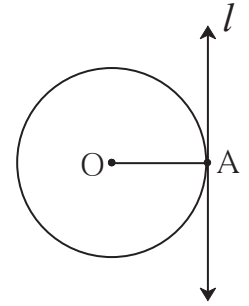
अर्थात् रेखा l , वृत्त को A और C दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करेगी। यह कथन दत्त से असंगत है

क्योंकि रेखा l स्पर्शरेखा है दत्त

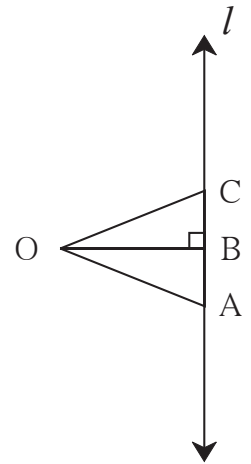
अर्थात् रेखा l वृत्त को एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती है।

\therefore रेखा l त्रिज्या OA पर लंब नहीं है; ऐसा मानना असत्य है।

\therefore रेखा $l \perp$ त्रिज्या OA .



आकृति 3.10

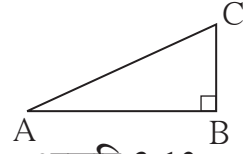


आकृति 3.11



थोड़ा याद करें

समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे बड़ी भुजा होती है, यह गुणधर्म पढ़े गए किस प्रमेय का उपयोग कर सिद्ध कर सकते हैं ?



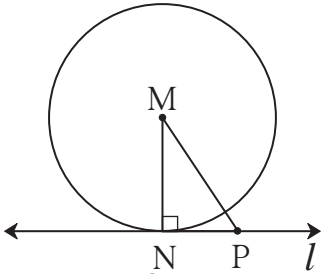
आकृति 3.12



आओ जानें

स्पर्श रेखा – त्रिज्या प्रमेय का विलोम (Converse of Tangent Theorem)

वृत्त की त्रिज्या के बाह्य सिरे से होकर जाने वाली तथा उस त्रिज्या पर लंब रेखा उस वृत्त की स्पर्श रेखा होती है।



आकृति 3.13

दत्त : रेखा MN, M केंद्रवाले वृत्त की त्रिज्या है। बिंदु N से जाने वाली रेखा l, त्रिज्या MN पर लंब है।

साध्य : रेखा l उस वृत्त की स्पर्श रेखा है।

उपपत्ति : रेखा l पर N के अतिरिक्त एक बिंदु P लीजिए। रेखा MP खींचिए।

अब, ΔMNP में $\angle N$ समकोण है।

\therefore रेखा MP विकर्ण है।

\therefore रेखा $MP >$ रेखा MN

\therefore बिंदु P वृत्त पर हो यह संभव नहीं।

अर्थात् रेखा l पर N के अतिरिक्त अन्य कोई भी बिंदु वृत्त पर नहीं है।

\therefore रेखा l वृत्त को एक ही बिंदु N पर प्रतिच्छेदित करती है।

\therefore रेखा l उस वृत्त की स्पर्श रेखा है।

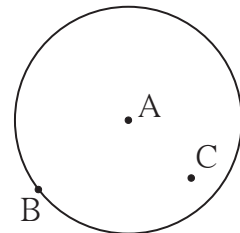


आओ चर्चा करें

A केंद्रवाले किसी वृत्त पर कोई बिंदु B स्थित है। इस वृत्त के बिंदु B से होकर जानेवाली स्पर्श रेखा खींचनी है।

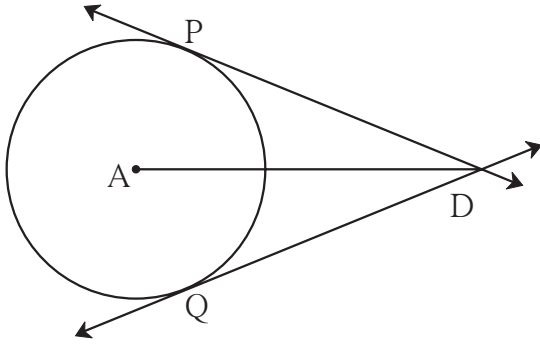
B बिंदु से जानेवाली असंख्य रेखाएँ हो सकती हैं। उनमें से कौन-सी रेखा इस वृत्त की स्पर्श रेखा होगी? उसे कैसे खींचा जा सकता है?

क्या बिंदु B से जाने वाली एक से अधिक स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं?



आकृति 3.14 ^D

क्या वृत्त के अंतःभाग में स्थित बिंदु C से उस वृत्त पर स्पर्श रेखा खींची जा सकती है?



आकृति 3.15

क्या वृत्त के बाह्य भाग में स्थित बिंदु D से उस वृत्त पर स्पर्श रेखा खींची जा सकती है? यदि हाँ तो कितनी स्पर्श रेखाएँ होंगी?

चर्चा से आपको ध्यान में आया होगा कि आकृति में दर्शाए अनुसार वृत्त के बाह्यभाग से उस वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

संलग्न आकृति में A केंद्रवाले वृत्त पर रेखा DP और रेखा DQ दो स्पर्शरेखाएँ, क्रमशः बिंदु P और बिंदु Q पर स्पर्श करती हैं।

रेख DP और रेख DQ को स्पर्शरेखाखंड कहते हैं।

स्पर्शरेखाखंड का प्रमेय (Tangent segment theorem)

प्रमेय : वृत्त के बाह्य भाग में स्थित बिंदु से उस वृत्त पर खींचे गए स्पर्श रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं।

साथ की आकृति के आधार पर दत्त और साध्य निश्चित कीजिए।

त्रिज्या AP और AQ खींचकर इस प्रमेय की उपपत्ति नीचे दिए गए रिक्त स्थानों को भरकर पूर्ण कीजिए।

उपपत्ति : ΔPAD और ΔQAD में,

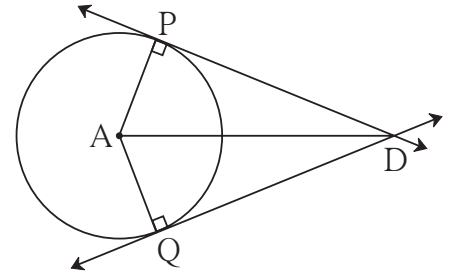
भुजा $PA \cong$ _____ (एक ही वृत्त की त्रिज्या)

भुजा $AD \cong$ भुजा AD _____

$\angle APD = \angle AQD = 90^\circ$ (स्पर्श रेखा का प्रमेय)

$\therefore \Delta PAD \cong \Delta QAD$ _____

\therefore भुजा $DP \cong$ भुजा DQ _____



आकृति 3.16

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) दी गई आकृति में, D केंद्रवाला वृत्त $\angle ACB$ के भुजाओं को बिंदु A तथा बिंदु B पर स्पर्श करता है। यदि $\angle ACB = 52^\circ$, तो $\angle ADB$ का माप ज्ञात कीजिए।

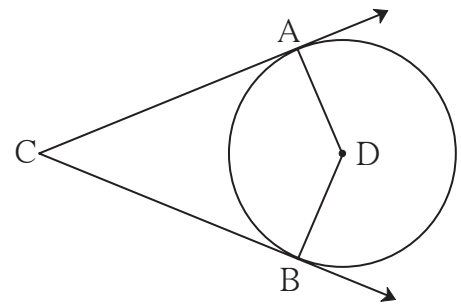
हल : चतुर्भुज के चारों कोणों के मापों का योगफल 360° होता है।

$$\therefore \angle ACB + \angle CAD + \angle CBD + \angle ADB = 360^\circ$$

$$\therefore 52^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \angle ADB = 360^\circ \dots\dots\dots (\text{स्पर्श रेखा त्रिज्या प्रमेय})$$

$$\therefore \angle ADB + 232^\circ = 360^\circ$$

$$\therefore \angle ADB = 360^\circ - 232^\circ = 128^\circ$$



आकृति 3.17

उदा. (2) रेखा a और रेखा b , O केंद्रवाले वृत्त की समांतर स्पर्श रेखाएँ वृत्त को क्रमशः बिंदु P तथा Q पर स्पर्श करती हैं, सिद्ध कीजिए कि रेखा PQ उस वृत्त का व्यास है।

उपपत्ति : बिंदु O से रेखा a के समांतर रेखा c खींचिए।

आकृति में दर्शाए अनुसार रेखा a, c, b पर क्रमशः बिंदु T, S, R लीजिए।

त्रिज्या OP और त्रिज्या OQ खींचिए।

अब, $\angle OPT = 90^\circ$ (स्पर्श रेखा त्रिज्या प्रमेय)

$\therefore \angle SOP = 90^\circ$ (अंतःकोण गुणधर्म) (I)

अब, रेखा $a \parallel$ रेखा c (रचना से)

रेखा $a \parallel$ रेखा b (दत्त)

रेखा $b \parallel$ रेखा c (स्पर्श रेखा प्रमेय)

अब $\angle OQR = 90^\circ$ (स्पर्श रेखा त्रिज्या प्रमेय)

$\therefore \angle SOQ = 90^\circ$ (अंतःकोण गुणधर्म) (II)

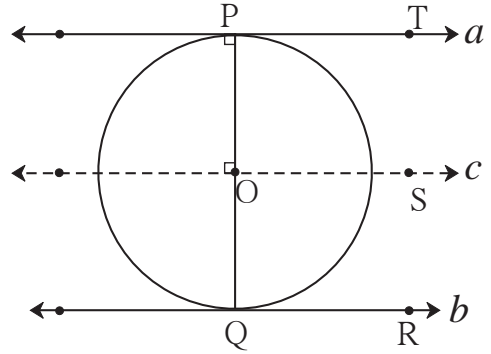
\therefore (I) तथा (II) से,

$\angle SOP + \angle SOQ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

\therefore किरण OP और किरण OQ विपरीत किरण हैं।

\therefore बिंदु P, O, Q एकरेखीय हैं।

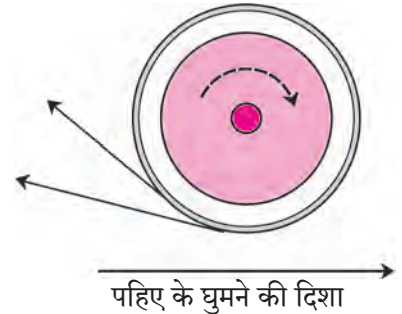
\therefore रेखा PQ वृत्त का व्यास है।



आकृति 3.18

बरसात में रास्ते पर जमा पानी में मोटर साइकिल जाते समय उसके पिछले पहिए से उड़ने वाले पानी की धारा को आपने देखा होगा। आप के ध्यान में आया होगा कि वे धाराएँ वृत्त की स्पर्श रेखा जैसे दिखाई देती हैं। वे धाराएँ ऐसे ही क्यों दिखाई देती हैं? उसकी जानकारी आप अपने विज्ञान अध्यापक से लीजिए।

घूमते हुए भूचक्र से निकलने वाली चिंगारियाँ उसी प्रकार चाकू को धार देते समय निकलने वाली चिंगारियों का निरीक्षण कीजिए। क्या वह स्पर्श रेखा जैसी दिखाई देती है?

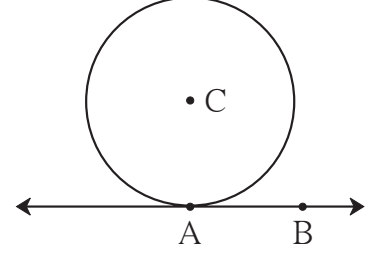


इसे ध्यान में रखें

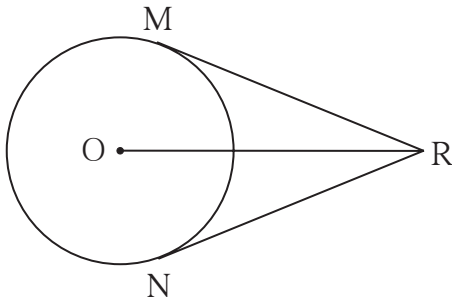
- (1) स्पर्श रेखा – त्रिज्या प्रमेय : वृत्त के किसी भी बिंदु से होकर जाने वाली स्पर्श रेखा उस बिंदु को केंद्र से जोड़ने वाली त्रिज्या पर लंब होती है।
- (2) स्पर्श रेखा – त्रिज्या प्रमेय का विलोम : वृत्त की त्रिज्या के बाह्य सिरे से होकर जाने वाली और उस त्रिज्या पर लंब रेखा उस वृत्त की स्पर्श रेखा होती है।
- (3) वृत्त के बाहर स्थित बिंदु से उस वृत्त पर खींचे गए स्पर्श रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं।

1. संलग्न आकृति में, C केंद्रवाले वृत्त की त्रिज्या 6 सेमी है। रेखा AB वृत्त को बिंदु A पर स्पर्श करता है। इस जानकारी के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

- (1) $\angle CAB$ का माप कितने अंश है? क्यों?
- (2) बिंदु C, रेखा AB से कितनी दूरी पर है? क्यों?
- (3) यदि $d(A,B) = 6$ सेमी, तो $d(B,C)$ ज्ञात कीजिए।
- (4) $\angle ABC$ का माप कितने अंश है? क्यों?



आकृति 3.19

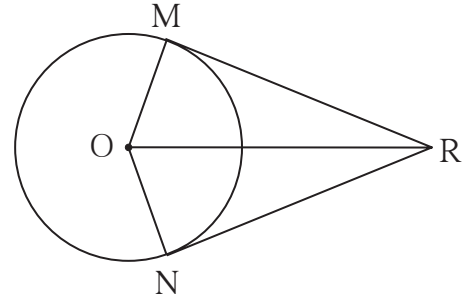


आकृति 3.20

2. संलग्न आकृति में, O केंद्रवाले वृत्त के बाह्य भाग में स्थित बिंदु R से खींचे गए RM और RN स्पर्श रेखाखंड वृत्त को बिंदु M और N पर स्पर्श करते हैं। यदि $l(O,R) = 10$ सेमी तथा वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी हो तो -

- (1) प्रत्येक स्पर्श रेखाखंड की लंबाई कितनी होगी?
- (2) $\angle MRO$ का माप कितना होगा?
- (3) $\angle MRN$ का माप कितना होगा?

3. रेख RM और रेख RN, O केंद्रवाले वृत्त के स्पर्श रेखाखंड हैं। सिद्ध कीजिए की रेख OR, $\angle MRN$ और $\angle MON$ दोनों कोणों का समद्विभाजक है।



आकृति 3.21

4. 4.5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ परस्पर समांतर हैं। उन स्पर्श रेखाओं के बीच की दूरी कितनी होगी कारण सहित लिखिए।



ICT Tools or Links

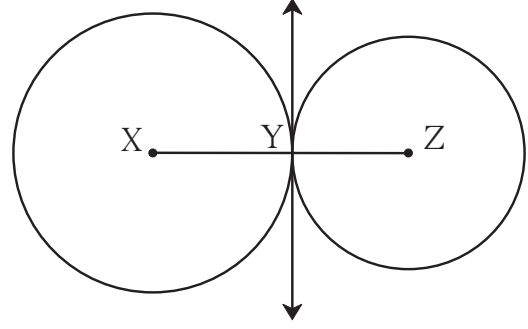
संगणक पर जिओजेब्रा इस सॉफ्टवेअर की सहायता से वृत्त तथा वृत्त के बाह्य भाग में स्थित बिंदु से स्पर्श रेखा खींचकर स्पर्श रेखाखंड सर्वांगसम है इसकी जाँच कीजिए।



स्पर्श वृत्त (Touching circle)

कृति I :

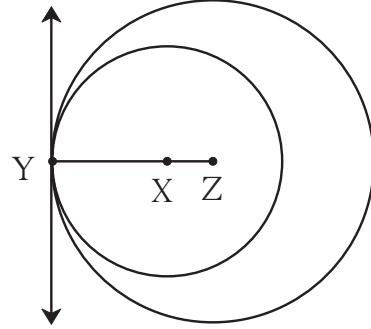
आकृति 3.22 में दर्शाए अनुसार $X-Y-Z$ एक रैखिक बिंदु लीजिए। केंद्र X तथा त्रिज्या XY लेकर वृत्त खींचिए। केंद्र Z तथा त्रिज्या YZ लेकर एक दूसरा वृत्त खींचिए। यह दोनों वृत्त एक दूसरे को एक ही सामान्य बिंदु Y पर स्पर्श करते हैं। बिंदु Y से रेखा XZ पर लंब रेखा खींचिए। यह ध्यान रहे कि यह रेखा दोनों वृत्तों की सामान्य स्पर्श रेखा है।



आकृति 3.22

कृति II :

आकृति 3.23 में दर्शाए अनुसार $Y-X-Z$ एक रैखिक बिंदु खींचिए। केंद्र Z और त्रिज्या ZY लेकर वृत्त खींचिए। केंद्र X और त्रिज्या XY लेकर वृत्त खींचिए। दोनों वृत्त एक दूसरे को एक ही सामान्य बिंदु Y पर स्पर्श करते हैं। बिंदु Y से रेखा YZ पर लंब रेखा खींचिए। ध्यान रहे यह रेखा दोनों वृत्तों की सामान्य स्पर्श रेखा है।



आकृति 3.23

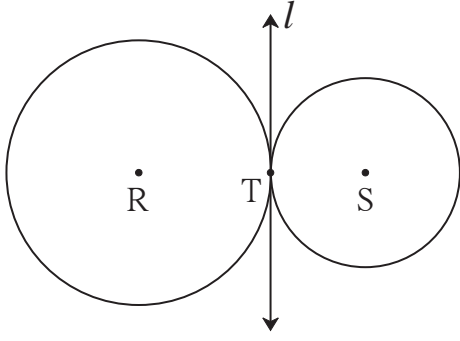
उपर्युक्त कृतियों में आपके ध्यान में आया होगा कि दोनों आकृतियों में वृत्त एक ही प्रतल में हैं और एक दूसरे को एक ही बिंदु पर स्पर्श करते हैं। ऐसे वृत्तों को एक दूसरे को स्पर्श करने वाले वृत्त या **स्पर्श वृत्त** कहते हैं।

स्पर्श वृत्तों की परिभाषा आगे दिए अनुसार की जाती है।

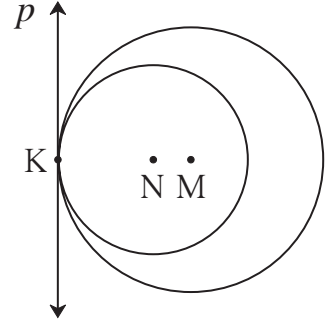
किसी प्रतल में स्थित दो वृत्त उसी प्रतल में स्थित एक रेखा को एक ही बिंदु पर स्पर्श करते हों तो उन्हें स्पर्श वृत्त कहते हैं। वह रेखा उन दोनों वृत्तों की सामान्य स्पर्श रेखा होती है।

दोनों वृत्त तथा रेखा पर स्थित सामान्य बिंदु को **सामान्य स्पर्श बिंदु** कहते हैं।





आकृति 3.24



आकृति 3.25

आकृति 3.24 में केंद्र R तथा केंद्र S वाले वृत्त रेखा l को एक ही बिंदु T पर स्पर्श करते हैं। अर्थात् उन दोनों स्पर्श वृत्तों की रेखा l सामान्य स्पर्श रेखा है। इस आकृति में वृत्त **बाह्यस्पर्शी** हैं।

आकृति 3.25 में वृत्त **अंतःस्पर्शी** हैं तथा रेखा p उनकी सामान्य स्पर्श रेखा है।

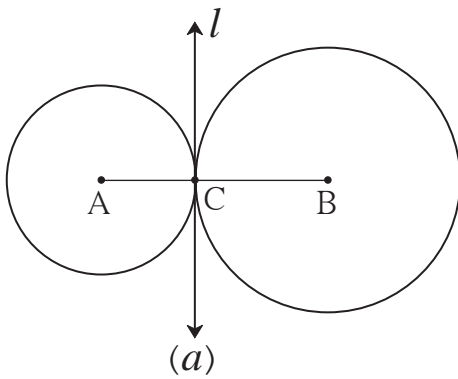


थोड़ा सोचें

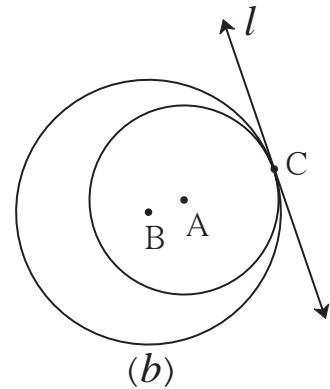
- (1) आकृति 3.24 में दिए गए वृत्तों के जैसे परस्पर स्पर्श करने वाले वृत्तों को बाह्यस्पर्शी वृत्त क्यों कहते हैं?
- (2) आकृति 3.25 में दिए गए वृत्तों के जैसे परस्पर स्पर्श करने वाले वृत्तों को अंतःस्पर्शी वृत्त क्यों कहते हैं?
- (3) नीचे दी गई आकृति 3.26 में, केंद्र A तथा B वाले वृत्तों की त्रिज्या क्रमशः 3 सेमी तथा 4 सेमी हो तो -
 - (i) आकृति 3.26 (a) में $d(A,B)$ कितना होगा?
 - (ii) आकृति 3.26 (b) में $d(A,B)$ कितना होगा?

स्पर्श वृत्त प्रमेय (Theorem of touching circles)

प्रमेय : यदि दो स्पर्श वृत्त हैं तो सामान्य बिंदु उन दो वृत्तों के केंद्रों को मिलने वाली रेखा पर होता है।



(a)



(b)

आकृति 3.26

दत्त : बिंदु A तथा B केंद्र वाले वृत्तों का स्पर्श बिंदु C है।

साध्य : C बिंदु रेखा AB पर स्थित है।

उपपत्ति : माना, रेखा l स्पर्श वृत्तों की सामान्य स्पर्श रेखा है।

रेखा $l \perp$ रेखा AC, रेखा $l \perp$ रेखा BC. \therefore रेखा AC तथा रेखा BC रेखा l पर लंब हैं।

बिंदु C से रेखा l पर एक ही लंब रेखा खींची जा सकती है। \therefore C, A, B एकरेखीय हैं।



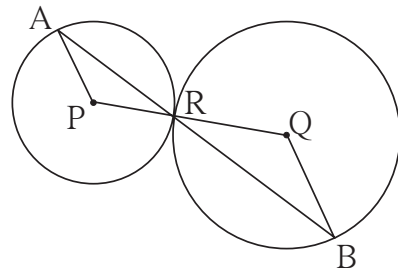
इसे ध्यान में रखें

- (1) परस्पर एक दूसरे को स्पर्श करने वाले वृत्तों का स्पर्श बिंदु उन वृत्तों के केंद्र बिंदु को जोड़नेवाले रेखा पर होता है।
- (2) बाह्यस्पर्शी वृत्तों के केंद्रों के बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं के योगफल के बराबर होती है।
- (3) अंतःस्पर्शी वृत्तों के केंद्रों के बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं के अंतर के बराबर होती है।

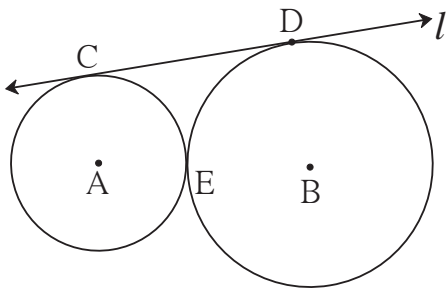
प्रश्नसंग्रह 3.2

1. परस्पर अंतःस्पर्श करने वाले दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 3.5 सेमी तथा 4.8 सेमी हों तो उनके केंद्रों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।
2. बाह्यस्पर्शी दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 5.5 सेमी तथा 4.2 सेमी हों तो उनके केंद्रों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।
3. 4 सेमी और 2.8 सेमी त्रिज्या वाले (1) बाह्यस्पर्शी (2) अंतःस्पर्शी वृत्त बनाइए।
4. आकृति 3.27 में P तथा Q केंद्र वाले वृत्त एकदूसरे को R बिंदु पर स्पर्श करते हैं। बिंदु R से जानेवाली रेखा उन वृत्तों को क्रमशः बिंदु A तथा बिंदु B पर प्रतिच्छेदित करती हो तो -

- (1) सिद्ध कीजिए रेखा AP \parallel रेखा BQ
- (2) सिद्ध कीजिए $\triangle APR \sim \triangle RQB$
- (3) यदि $\angle PAR$ का माप 35° हो,
तो $\angle RQB$ का माप ज्ञात कीजिए।



आकृति 3.27



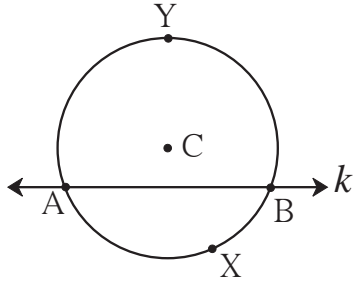
आकृति 3.28

5. आकृति 3.28 में A तथा B केंद्रवाले वृत्त परस्पर बिंदु E पर स्पर्श करते हैं। उनकी सामान्य स्पर्शरेखा l उन्हें क्रमशः C तथा D बिंदुओं पर स्पर्श करती है। यदि वृत्तों की त्रिज्या क्रमशः 4 सेमी तथा 6 सेमी हो तो रेखा CD की लंबाई कितनी होगी?



थोड़ा याद करें

वृत्त चाप (Arc of a circle)



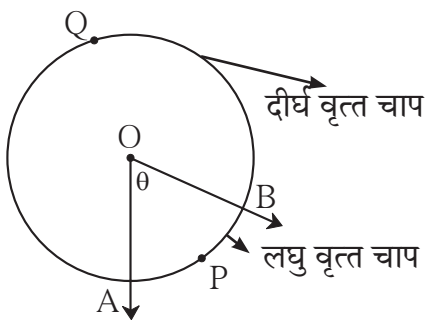
आकृति 3.29

आकृति 3.29 में वृत्त की छेदन रेखा k द्वारा, C केंद्र वाले वृत्त के AYB और AXB दो चाप बनते हैं।

वृत्त की छेदन रेखा के जिस ओर वृत्त का केंद्र होता है उस ओर के चाप को **दीर्घ चाप** तथा दूसरी ओर के चाप को **लघु चाप** कहते हैं। आकृति 3.29 में चाप AYB दीर्घ चाप और चाप AXB लघु चाप है। किसी वृत्त चाप का नाम तीन अक्षरों का उपयोग करके लिखने से संकल्पना स्पष्ट होती है। परंतु यदि कोई संदेह न हो तो लघु चाप का नाम उनके अंत बिंदु दर्शाने वाले दो अक्षरों द्वारा लिखते हैं। उदाहरण के लिए आकृति 3.29 में चाप AXB को चाप AB भी लिखते हैं।

हम चाप का नाम लिखने के लिए इसी पद्धति का उपयोग करने वाले हैं।

केंद्रीय कोण (Central angle)



आकृति 3.30

जिस कोण का शीर्ष बिंदु वृत्त के केंद्र पर होता है, उस कोण को **केंद्रीय कोण** कहते हैं।

आकृति 3.30 में O केंद्र वाले वृत्त का $\angle AOB$ केंद्रीय कोण है।

वृत्त की छेदन रेखा की तरह ही केंद्रीय कोण द्वारा भी वृत्त के दो चाप बनते हैं।

चाप का माप (Measure of an arc)

कई बार दो चापों में तुलना करने की आवश्यकता होती है। इसके लिए चाप के माप की व्याख्या आगे दी गई है।

(1) लघु चाप का माप उसके संगत केंद्रीय कोण के माप के बराबर होता है ।

आकृति 3.30 में केंद्रीय $\angle AOB$ का माप θ है। इसलिए लघु चाप APB का भी माप θ होगा ।

(2) दीर्घ चाप का माप = 360° - संगत लघु चाप का माप

आकृति 3.30 में दीर्घ चाप AQB का माप = 360° - चाप APB का माप = $360^\circ - \theta$

(3) अर्धवृत्तीय चाप, अर्थात अर्ध वृत्त का माप 180° होता है ।

(4) पूर्ण वृत्तचाप का माप, अर्थात पूर्ण वृत्त का माप, 360° होता है ।



आओ जानें

चाप की सर्वांगसमता (Congruence of arcs)

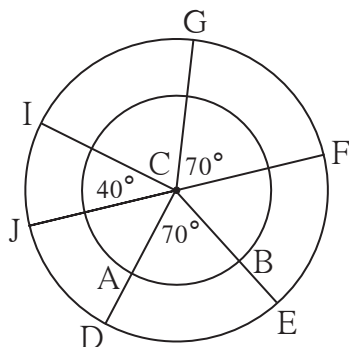
जब दो एक प्रतलीय आकृतियाँ एक दूसरे को पूरी तरह ढँक लेती हैं तो कहा जाता है कि वे आकृतियाँ एक दूसरे की सर्वांगसम हैं । सर्वांगसमता की इस संकल्पना के आधार पर समान मापवाले कोण सर्वांगसम होते हैं यह हमें ज्ञात है ।

इसी प्रकार दो चापों के माप समान हों तो वे दोनों चाप सर्वांगसम होंगे क्या ?

इस प्रश्न का उत्तर दी गई कृति करके प्राप्त कीजिए ।

कृति :

आकृति 3.31 में दर्शाए अनुसार C केंद्रवाले दो वृत्त खींचिए। $\angle DCE$ और $\angle FCG$ समान मापवाले



आकृति 3.31

कोण बनाइए। इन कोणों के माप से अलग मापवाला $\angle ICJ$ खींचिए ।

$\angle DCE$ की भुजा द्वारा आंतरिक वृत्त को प्रतिच्छेदित करने पर प्राप्त चाप को AB नाम दीजिए ।

चाप के माप की व्याख्या के आधार पर, चाप AB और चाप DE के माप समान है, यह ध्यान में आता है । क्या वे दोनों चाप आपस में एक दूसरे को ढँक लेंगे? निश्चित ही ढँक नहीं पाएँगे ।

अब C-DE; C-FG और C-IJ वृत्त खंड काटकर अलग कीजिए । उन्हें एक दूसरे के ऊपर रखकर देखिए कि DE, FG और IJ में से कौन-सा चाप एक दूसरे को ढँक लेता है ।

इस कृति के आधार पर यह ध्यान आता है कि दो चाप सर्वांगसम होने के लिए 'उनके माप समान हैं' यह पर्याप्त नहीं है ?

दो चाप सर्वांगसम होने के लिए अन्य कौन-सी शर्तें पूरी होनी आवश्यक हैं ?

उपर्युक्त कृति से ज्ञात होता है, कि -

दो चापों की त्रिज्या एवं माप समान होते हैं तो वे दोनों चाप परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।

'चाप DE तथा चाप GF सर्वांगसम हैं।' इसे चिन्ह द्वारा चाप $DE \cong$ चाप GF ऐसे दर्शाते हैं ।

समान है। उन चापों के माप अर्थात् उनके संगत केंद्रीय कोण के माप होते हैं। यह केंद्रीय कोण प्राप्त करने के लिए त्रिज्या OP, OQ, OR और OS खींचना पड़ेगा। इसे खींचने पर प्राप्त ΔOPQ और ΔORS सर्वांगसम हैं कि नहीं?

उपर्युक्त दोनों प्रमेय आप सर्वांगसम वृत्तों के लिए सिद्ध कीजिए।



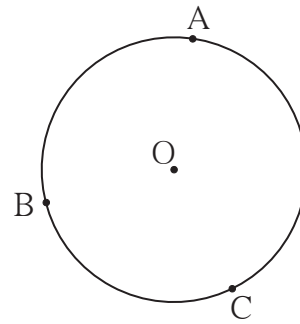
थोड़ा सोचें

- उपर्युक्त दो में से पहले प्रमेय में लघुचाप APC और चाप DQE लघु चाप को सर्वांगसम माना है। क्या इनके संगत दीर्घ चापों को सर्वांगसम मानकर भी यह प्रमेय सिद्ध किया जा सकता है?
- क्या दूसरे प्रमेय में सर्वांगसम जीवा के संगत दीर्घ चाप भी सर्वांगसम होते हैं? जीवा PQ और जीवा RS यदि व्यास हों तो भी क्या यह प्रमेय सही होता है?

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) O केंद्रवाले वृत्त के A, B तथा C तीन बिंदु हैं।

- इन तीन बिंदुओं से बनने वाले सभी चापों के नाम लिखिए।
- चाप BC और चाप AB के माप क्रमशः 110° और 125° हों तो शेष सभी चापों के माप लिखिए।



आकृति 3.35

हल : (i) चाप का नाम -

चाप AB, चाप BC, चाप AC, चाप ABC, चाप ACB, चाप BAC

(ii) चाप ABC का माप = चाप AB का माप + चाप BC का माप

$$= 125^\circ + 110^\circ = 235^\circ$$

चाप AC का माप = 360° - चाप ACB का माप

$$= 360^\circ - 235^\circ = 125^\circ$$

इसी प्रकार चाप ACB का माप = $360^\circ - 125^\circ = 235^\circ$

और चाप BAC का माप = $360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$

उदा. (2) आकृति 3.36 में T केंद्र वाले वृत्त में आयत PQRS अंतर्लिखित है।

दिखाइए कि -

(1) चाप PQ \cong चाप SR

(2) चाप SPQ \cong चाप PQR

हल : (1) \square PQRS एक आयत है।

\therefore जीवा PQ \cong जीवा SR (आयत की सम्मुख भुजाएँ)

\therefore चाप PQ \cong चाप SR (सर्वांगसम जीवा के संगत चाप)

(2) जीवा PS \cong जीवा QR (आयत की सम्मुख भुजाएँ)

\therefore चाप SP \cong चाप QR (सर्वांगसम जीवा के संगत चाप)

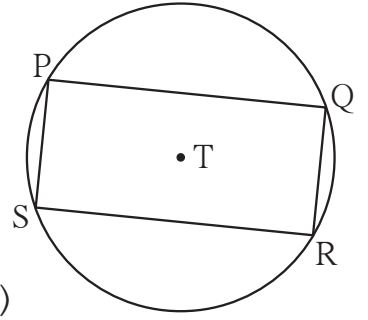
\therefore चाप SP और चाप QR के माप समान हैं (I)

अब, चाप SP और चाप PQ के मापों का योगफल

= चाप PQ और चाप QR के मापों का योगफल

\therefore चाप SPQ का माप = चाप PQR का माप

\therefore चाप SPQ \cong चाप PQR



आकृति 3.36



इसे ध्यान में रखें

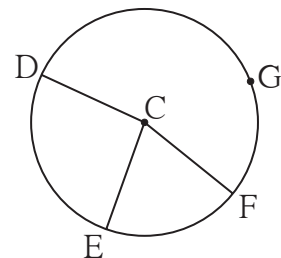
- (1) जिस कोण का शीर्षबिंदु वृत्त के केंद्र पर होता है उस कोण को केंद्रीय कोण कहते हैं।
- (2) चाप के माप की परिभाषा - (i) लघु चाप का माप उसके संगत केंद्रीय कोण के माप के बराबर होता है।
(ii) दीर्घ चाप का माप = 360° - संगत लघु चाप का माप (iii) अर्धवृत्त के चाप का माप 180° होता है।
- (3) किन्हीं दो वृत्त चापों की त्रिज्या और माप समान हों तो वे सर्वांगसम होते हैं।
- (4) एक ही वृत्त के चाप ABC और चाप CDE के बीच जब एक ही सामान्य बिंदु C होता है, तब
 $m(\text{चाप ABC}) + m(\text{चाप CDE}) = m(\text{चाप ACE})$
- (5) एक ही वृत्त के (या सर्वांगसम वृत्तों के) सर्वांगसम चापों की संगत जीवाएँ सर्वांगसम होती हैं।
- (6) एक ही वृत्त के (या सर्वांगसम वृत्तों के) सर्वांगसम जीवाओं के संगत चाप सर्वांगसम होते हैं।



प्रश्नसंग्रह 3.3

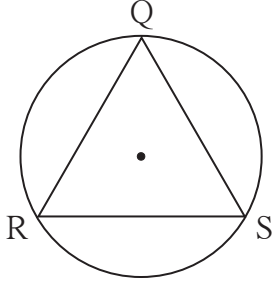


1. आकृति 3.37 में, C केंद्रवाले वृत्त पर G, D, E और F बिंदु हैं। $\angle ECF$ का माप 70° और चाप DGF का माप 200° हो, तो चाप DE और चाप DEF के माप ज्ञात कीजिए।



आकृति 3.37





आकृति 3.38

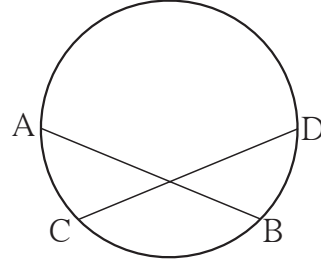
2*. आकृति 3.38 में ΔQRS समबाहु त्रिभुज है।

तो सिद्ध कीजिए -

(1) चाप $RS \cong$ चाप $QS \cong$ चाप QR

(2) चाप QRS का माप 240° है।

3. आकृति 3.39 में,
जीवा $AB \cong$ जीवा CD ,
तो सिद्ध कीजिए -
चाप $AC \cong$ चाप BD



आकृति 3.39

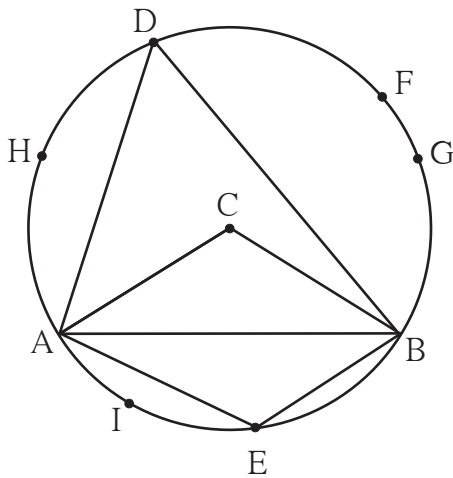


आओ जानें

वृत्त और बिंदु, वृत्त और रेखा (स्पर्श रेखा) में परस्पर संबंध बताने वाले कुछ गुणधर्म हमने देखे। आइए अब हम वृत्त और कोण में संबंध दर्शाने वाले कुछ गुणधर्म देखते हैं। इनमें से कुछ गुणधर्म दी गई कृतियों से जानिए।

कृति I :

C केंद्र वाला एक पर्याप्त बड़ा वृत्त खींचिए। आकृति 3.40 में दर्शाए अनुसार उसकी जीवा AB खींचिए।



आकृति 3.40

केंद्रीय कोण ACB खींचिए। आकृति 3.40 में दर्शाए अनुसार उसकी जीवा AB द्वारा बनने वाले दीर्घ चाप पर कोई बिंदु D तथा लघु चाप पर कोई बिंदु E लें।

(1) $\angle ADB$ और $\angle ACB$ मापें। उनके मापों की तुलना कीजिए।

(2) $\angle ADB$ और $\angle AEB$ मापें। प्राप्त मापों का योगफल ज्ञात करके देखें।



(3) चाप ADB पर F, G, H ऐसे कुछ और बिंदु लीजिए ।

$\angle AFB, \angle AGB, \angle AHB, \dots$ के माप ज्ञात कीजिए ।

इन मापों की आपस में तथा $\angle ADB$ के माप से तुलना कीजिए ।

(4) चाप AEB पर एक अन्य बिंदु I लीजिए । $\angle AIB$ को मापकर उसके माप की तुलना $\angle AEB$ के माप से कीजिए ।

इस कृति से आपको इस प्रकार का अनुभव प्राप्त होता है -

(1) $\angle ACB$ का माप $\angle ADB$ के माप का दो गुना होता है ।

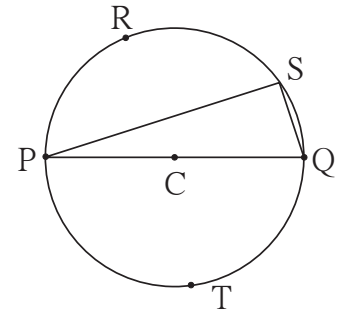
(2) $\angle ADB$ और $\angle AEB$ के मापों का योगफल 180° होता है ।

(3) $\angle AHB, \angle ADB, \angle AFB, \angle AGB$ इन सभी के माप समान हैं ।

(4) $\angle AEB$ और $\angle AIB$ के माप समान हैं ।

कृति II :

आकृति 3.41 में दर्शाएनुसार C केंद्रवाला एक बड़ा वृत्त बनाइए । उसमें एक व्यास PQ खींचिए । इस व्यास से बने दोनों अर्धवृत्तों पर R, S, T ऐसे कुछ बिंदु लीजिए । $\angle PRQ, \angle PSQ, \angle PTQ$ मापिए । इनमें से प्रत्येक कोण समकोण है यह अनुभव कीजिए ।



आकृति 3.41

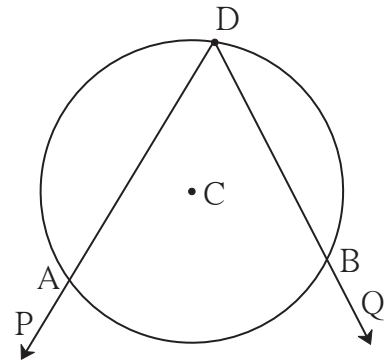
उपर्युक्त कृति से प्राप्त गुणधर्म का अर्थ वृत्त और कोण से संबंधित प्रमेय है ।

अब इस प्रमेय की उपपत्ति सीखें, इससे पहले कुछ संज्ञाओं (संबोधो) की पहचान करनी होगी ।

अंतर्लिखित कोण (Inscribed angle)

आकृति 3.42 में C केंद्रवाला एक वृत्त है । $\angle PDQ$ का शीर्षबिंदु D इस वृत्त पर है । कोण की भुजाएँ DP और DQ वृत्त को क्रमशः A और B पर प्रतिच्छेदित करती हैं । ऐसे कोण को वृत्त का अंतर्लिखित कोण कहते हैं ।

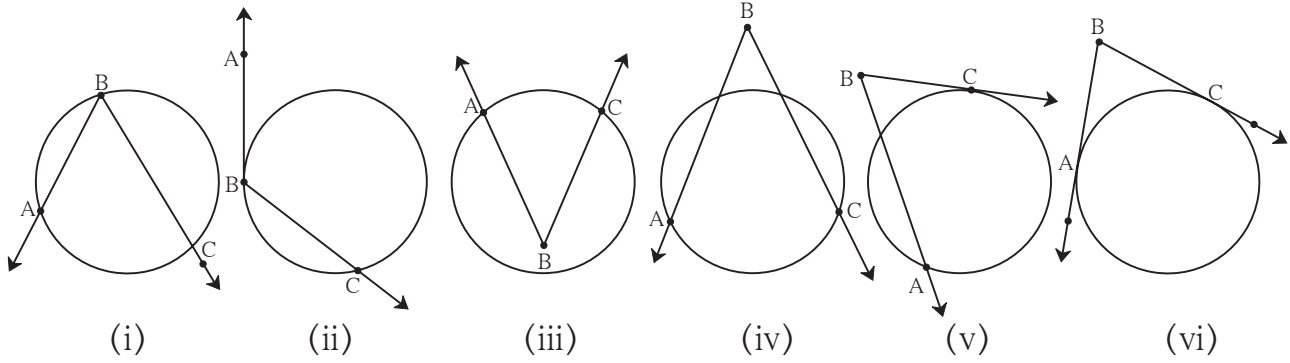
आकृति 3.42 में $\angle ADB$ चाप ADB में अंतर्लिखित है ।



आकृति 3.42

अंतःखंडित चाप (Intercepted arc)

दी गई आकृति 3.43 में (i) से (vi) सभी आकृतियों का निरीक्षण कीजिए ।



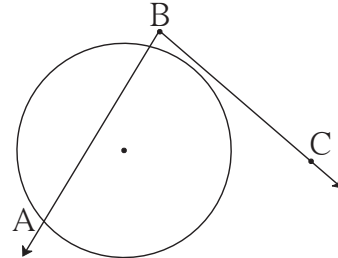
आकृति 3.43

प्रत्येक आकृति में $\angle ABC$ के अंतःभाग में आनेवाले वृत्त चाप को $\angle ABC$ द्वारा अंतःखंडित चाप कहते हैं। अंतःखंडित चाप के अंतबिंदु वृत्त और कोण के छेदन बिंदु होते हैं। कोण की प्रत्येक भुजा पर चाप का एक अंत बिंदु होना आवश्यक होता है ।

आकृति 3.43 के (i), (ii) तथा (iii) आकृतियों में प्रत्येक कोण ने एक ही चाप अंतःखंडित किया है; (iv), (v) तथा (vi) में प्रत्येक कोण ने दो चाप अंतःखंडित किया है ।

ध्यान रहे, आकृति (ii) तथा (v) में कोण की एक भुजा और (vi) में कोण की दोनों भुजाएँ वृत्त को स्पर्श करती हैं ।

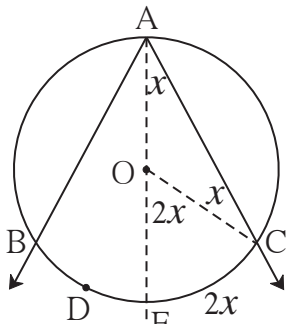
आकृति 3.44 में चाप, अंतःखंडित चाप नहीं है क्योंकि कोण की भुजा BC पर चाप का एक भी अंत बिंदु नहीं है ।



आकृति 3.44

अंतर्लिखित कोण का प्रमेय (Inscribed angle theorem)

वृत्त में अंतर्लिखित कोण का माप उसके द्वारा अंतःखंडित चाप के माप का आधा होता है ।



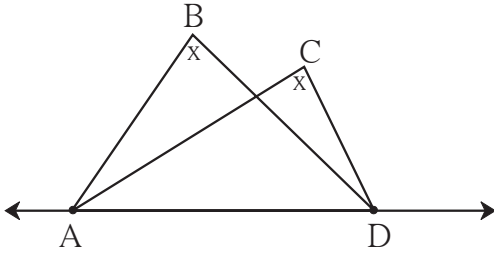
आकृति 3.45

दत्त : O केंद्र वाले वृत्त में, $\angle BAC$ चाप BAC में अंतर्लिखित है । इस कोण द्वारा चाप BDC अंतःखंडित हुआ है ।

साध्य : $\angle BAC = \frac{1}{2} m(\text{चाप BDC})$

रचना : किरण AO खींचिए। यह वृत्त को बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करता है । त्रिज्या OC खींचिए ।

प्रमेय : किसी रेखा पर स्थित दो भिन्न बिंदु उसी रेखा के एक ही ओर स्थित दो भिन्न बिंदुओं पर सर्वांगसम कोण बनाते हों तो वे चारों बिंदु एक ही वृत्त पर होते हैं ।



आकृति 3.50

दत्त : बिंदु B तथा C रेखा AD के एक ही ओर स्थित हैं । $\angle ABD \cong \angle ACD$

साध्य : बिंदु A, B, C, D एक ही वृत्त पर हैं। (अर्थात $\square ABCD$ चक्रीय चतुर्भुज है ।) पिछले प्रमेय के अनुसार इसको अप्रत्यक्ष रूप से सिद्ध कर सकते हैं ।



थोड़ा सोचें

उपर्युक्त प्रमेय किस प्रमेय का विलोम है ?

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) आकृति 3.51 में, जीवा $LM \cong$ जीवा LN

$\angle L = 35^\circ$ तो

(i) $m(\text{चाप } MN) =$ कितना ?

(ii) $m(\text{चाप } LN) =$ कितना ?

हल : (i) $\angle L = \frac{1}{2} m(\text{चाप } MN) \dots\dots$ (अंतर्लिखित कोण प्रमेय)

$$\therefore 35 = \frac{1}{2} m(\text{चाप } MN)$$

$$\therefore 2 \times 35 = m(\text{चाप } MN) = 70^\circ$$

$$(ii) m(\text{चाप } MLN) = 360^\circ - m(\text{चाप } MN) \dots\dots \text{ (चाप के माप की परिभाषा से)}$$

$$= 360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$$

अब, जीवा $LM \cong$ जीवा LN

\therefore चाप $LM \cong$ चाप LN

परंतु $m(\text{चाप } LM) + m(\text{चाप } LN) = m(\text{चाप } LMN) = 290^\circ \dots\dots$ (चापों के योगफल का गुणधर्म)

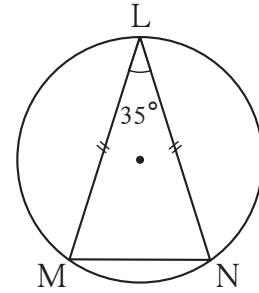
$$m(\text{चाप } LM) = m(\text{चाप } LN) = \frac{290^\circ}{2} = 145^\circ$$

अथवा, (ii) जीवा $LM \cong$ जीवा LN

$\therefore \angle M = \angle N \dots\dots$ (समद्विबाहु त्रिभुज प्रमेय)

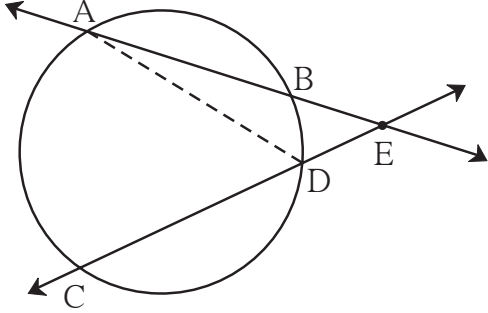
$$\therefore 2\angle M = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$$

$$\therefore \angle M = \frac{145^\circ}{2}$$



आकृति 3.51

उदा. (3) सिद्ध कीजिए कि वृत्त की जीवाओं को समाविष्ट करने वाली रेखा यदि वृत्त के बाह्य भाग में प्रतिच्छेदित करती हो तो उन रेखाओं द्वारा बने कोण का माप उस कोण द्वारा अंतःखंडित चापों के मापों की दूरी का आधा होता है। सिद्ध कीजिए।



आकृति 3.53

दत्त : वृत्त की जीवा AB और जीवा CD उस वृत्त के बाह्यभाग में स्थित बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करती हैं।

साध्य : $\angle AEC = \frac{1}{2} [m(\text{चाप AC}) - m(\text{चाप BD})]$

रचना : रेख AD खींचा।

उपपत्ति : इस गुणधर्म को उपर्युक्त उदा. (2) में दी गई उपपत्ति के अनुसार सिद्ध किया जा सकता है। इसके लिए ΔAED के कोण, उस त्रिभुज के बहिष्कोण इत्यादि को ध्यान में रखकर उपपत्ति लिखिए।



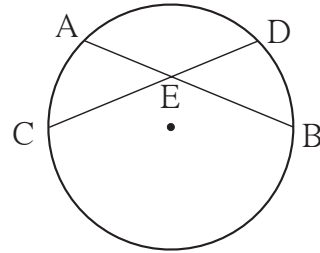
इसे ध्यान में रखें

- (1) वृत्त में अंतर्लिखित कोण का माप, उसके द्वारा अंतःखंडित चाप के माप का आधा होता है।
- (2) वृत्त के एक ही चाप में अंतर्लिखित सभी कोण सर्वांगसम होते हैं।
- (3) अर्धवृत्त में अंतर्लिखित कोण समकोण होते हैं।
- (4) यदि चतुर्भुज के चारों शीर्षबिंदु एक ही वृत्त पर हों तो उस चतुर्भुज को चक्रीय चतुर्भुज कहते हैं।
- (5) चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण संपूरक होते हैं।
- (6) चक्रीय चतुर्भुज के बहिष्कोण उसके संलग्न कोण के सम्मुख कोण के सर्वांगसम होते हैं।
- (7) चतुर्भुज के सम्मुख कोण परस्पर संपूरक हों तो चतुर्भुज चक्रीय होता है।
- (8) किसी रेखा पर स्थित दो भिन्न बिंदु उसी रेखा के एक ही ओर स्थित दो भिन्न बिंदुओं पर सर्वांगसम कोण बनाते हों तो वे चारों बिंदु एक ही वृत्त पर होते हैं।

(9) संलग्न आकृति 3.54 में,

(i) $\angle AEC = \frac{1}{2} [m(\text{चाप AC}) + m(\text{चाप DB})]$

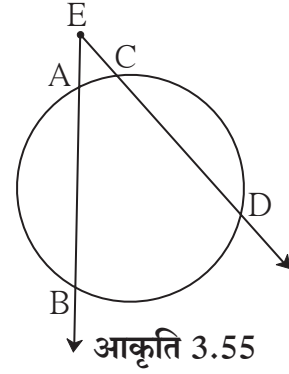
(ii) $\angle CEB = \frac{1}{2} [m(\text{चाप AD}) + m(\text{चाप CB})]$



आकृति 3.54

(10) संलग्न आकृति 3.55 में,

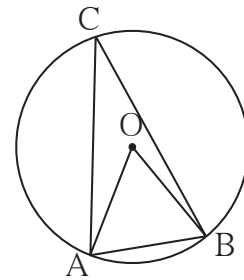
$$\angle BED = \frac{1}{2} [m(\text{चाप } BD) - m(\text{चाप } AC)]$$



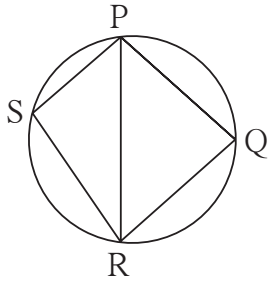
आकृति 3.55

प्रश्नसंग्रह 3.4

1. आकृति 3.56 में, O केंद्र वाले वृत्त की जीवा AB की लंबाई वृत्त की त्रिज्या के बराबर है। तो
 (1) $\angle AOB$ (2) $\angle ACB$ (3) चाप AB और
 (4) चाप ACB का माप ज्ञात कीजिए।



आकृति 3.56

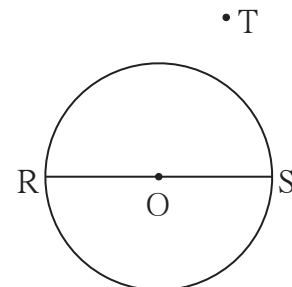


आकृति 3.57

2. आकृति 3.57 में, $\square PQRS$ एक चक्रीय चतुर्भुज है। भुजा $PQ \cong$ भुजा RQ $\angle PSR = 110^\circ$, तो
 (1) $\angle PQR =$ कितना?
 (2) $m(\text{चाप } PQR) =$ कितना?
 (3) $m(\text{चाप } QR) =$ कितना?
 (4) $\angle PRQ =$ कितना?

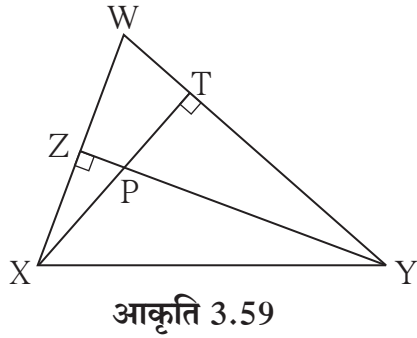
3. चक्रीय $\square MRPN$ में, $\angle R = (5x - 13)^\circ$ और $\angle N = (4x + 4)^\circ$, तो $\angle R$ और $\angle N$ के माप ज्ञात कीजिए।

4. आकृति 3.58 में रेखा RS ; O केंद्र वाले वृत्त का व्यास है। बिंदु T वृत्त के बाह्यभाग में स्थित एक बिंदु है। तो सिद्ध कीजिए $\angle RTS$ एक न्यूनकोण है।



आकृति 3.58

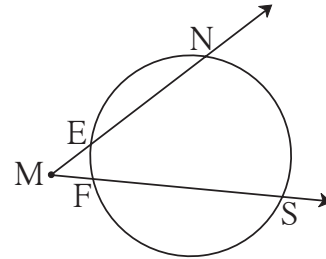
5. सिद्ध कीजिए कि कोई भी आयत चक्रीय चतुर्भुज होता है।



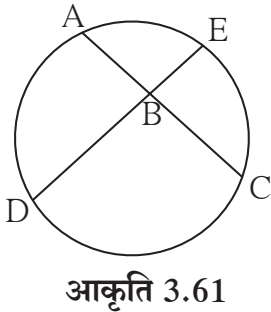
आकृति 3.59

6. आकृति 3.59 में, रेख YZ और रेख XT ΔWXY के शीर्षबिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं। सिद्ध कीजिए कि
- $\square WZPT$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।
 - बिंदु X, Z, T, Y एक ही वृत्त पर हैं।

7. आकृति 3.60 में $m(\text{चाप NS}) = 125^\circ$, $m(\text{चाप EF}) = 37^\circ$, तो $\angle NMS$ का माप ज्ञात कीजिए।

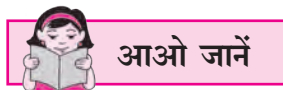


आकृति 3.60



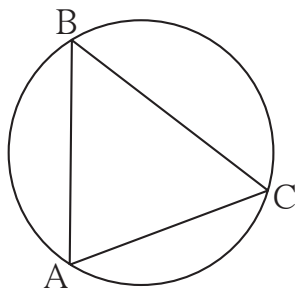
आकृति 3.61

8. आकृति 3.61 में जीवा AC और जीवा DE बिंदु B पर प्रतिच्छेदित करती हैं। यदि $\angle ABE = 108^\circ$ और $m(\text{चाप AE}) = 95^\circ$ तो $m(\text{चाप DC})$ ज्ञात कीजिए।



कृति :

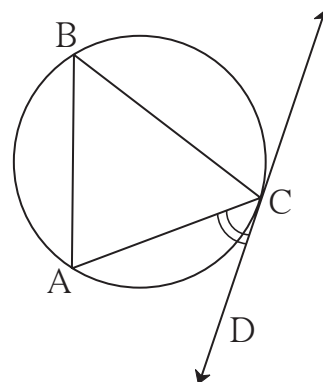
एक पर्याप्त बड़े आकार का वृत्त खींचिए। आकृति 3.62 में दर्शाए अनुसार वृत्त में एक जीवा AC खींचिए।



आकृति 3.62

वृत्त पर एक बिंदु B लीजिए। $\angle ABC$ एक अंतर्लिखित कोण बनाइए। $\angle ABC$ का माप ज्ञात कर के लिखिए।

अब, आकृति 3.63 में दर्शाए अनुसार उस वृत्त की स्पर्शरेखा CD खींचिए। $\angle ACD$ का माप नापिए।



आकृति 3.63

$\angle ACD$ का माप, $\angle ABC$ के माप के बराबर है। यह आपको समझ में आएगा।

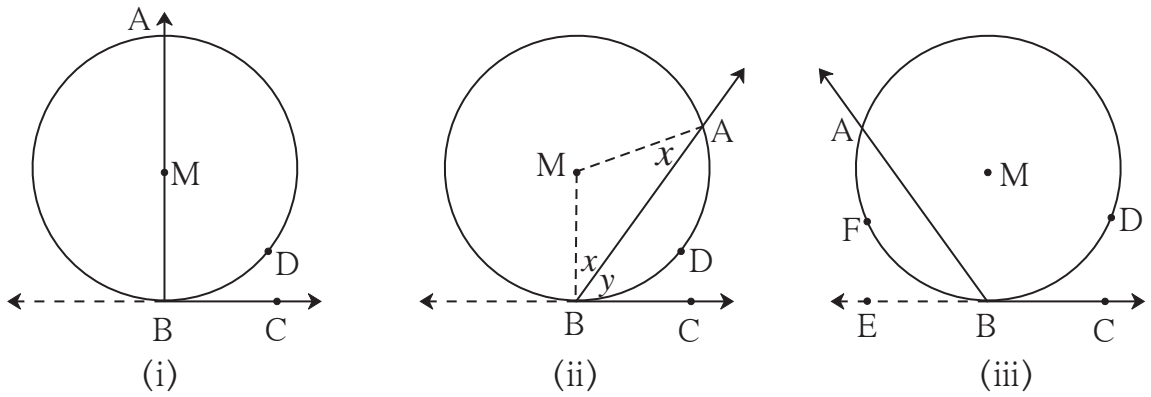
आप जानते हैं कि, $\angle ABC = \frac{1}{2} m(\text{चाप } AC)$ ।

इस आधार पर यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि, $\angle ACD$ का माप चाप AC के माप के आधा होता है।

यह भी वृत्त की स्पर्शरेखा का एक महत्त्वपूर्ण गुणधर्म है। आइए इसे हम सिद्ध करें।

स्पर्श रेखा-छेदन रेखा कोण का प्रमेय (Theorem of angle between tangent and secant)

यदि किसी कोण का शीर्षबिंदु वृत्त पर है, एक भुजा वृत्त को स्पर्श करती है तथा दूसरी भुजा वृत्त को दो भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करती हो, तो कोण का माप उसके द्वारा अंतःखंडित चाप के माप का आधा होता है।



आकृति 3.64

दत्त : $\angle ABC$ का शीर्ष बिंदु M केंद्र वाले वृत्त पर है। भुजा BC वृत्त को स्पर्श करती है। भुजा BA वृत्त को बिंदु A पर प्रतिच्छेदित करती है। चाप ADB , कोण $\angle ABC$ द्वारा अंतःखंडित चाप है।

साध्य : $\angle ABC = \frac{1}{2} m(\text{चाप } ADB)$

उपपत्ति : यह प्रमेय सिद्ध करने के लिए तीन संभावनाओं पर विचार करना होगा।

(1) आकृति 3.64 (i) के अनुसार वृत्त का केंद्र M , $\angle ABC$ के एक भुजा पर हो,

तो $\angle ABC = \angle MBC = 90^\circ \dots\dots$ (स्पर्शरेखा प्रमेय) (I)

चाप ADB एक अर्धवृत्त है।

$\therefore m(\text{चाप } ADB) = 180^\circ \dots\dots$ (चाप के माप की परिभाषा से) (II)

(I) तथा (II) से

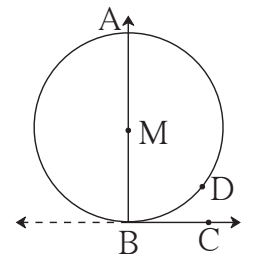
$\angle ABC = \frac{1}{2} m(\text{चाप } ADB)$

(2) आकृति 3.64 (ii) के अनुसार केंद्र M , $\angle ABC$ के बाह्यभाग में होने पर,

त्रिज्या MA और त्रिज्या MB खींचिए।

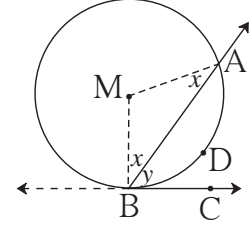
अब, $\angle MBA = \angle MAB \dots\dots$ (समद्विबाहु त्रिभुज प्रमेय)

इसी प्रकार, $\angle MBC = 90^\circ \dots\dots$ (स्पर्शरेखा प्रमेय) $\dots\dots$ (I)



आकृति 3.64(i)

माना $\angle MBA = \angle MAB = x$, $\angle ABC = y$
 $\angle AMB = 180 - (x + x) = 180 - 2x$
 $\angle MBC = \angle MBA + \angle ABC = x + y$
 $\therefore x + y = 90^\circ \quad \therefore 2x + 2y = 180^\circ$
 ΔAMB में $2x + \angle AMB = 180^\circ$
 $\therefore 2x + 2y = 2x + \angle AMB$
 $\therefore 2y = \angle AMB$
 $\therefore y = \angle ABC = \frac{1}{2} \angle AMB = \frac{1}{2} m(\text{चाप ADB})$



आकृति 3.64(ii)

(3) तीसरी संभावना के लिए नीचे दी गई उपपत्ति आकृति 3.64 (iii) के आधार पर, रिक्त स्थानों की पूर्ति कर स्वयं पूर्ण कीजिए।

किरण किरण BC की विपरीत किरण खींचा।

अब, $\angle ABE = \frac{1}{2} m(\text{ })$ (2) में सिद्ध किया है।

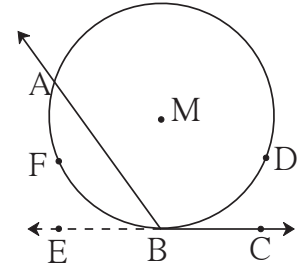
$\therefore 180 - \text{ } = \angle ABE$ (रैखिक युगल कोण)

$\therefore 180 - \text{ } = \frac{1}{2} m(\text{चाप AFB})$
 $= \frac{1}{2} (360 - \angle \text{ })$

$\therefore 180 - \angle ABC = 180 - \frac{1}{2} m(\text{चाप ADB})$

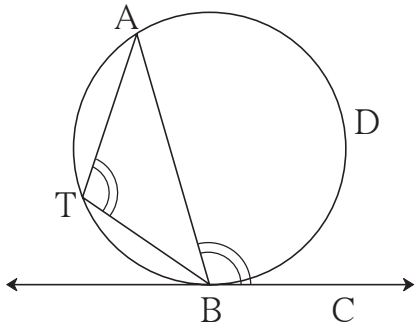
$\therefore -\angle ABC = -\frac{1}{2} m(\text{ })$

$\therefore \angle ABC = \frac{1}{2} m(\text{चाप ADB})$



आकृति 3.64(iii)

स्पर्श रेखा – छेदन रेखा कोण के प्रमेय का वैकल्पिक कथन



आकृति 3.65

आकृति में AB वृत्त की छेदन रेखा और BC स्पर्श रेखा है। चाप ADB, $\angle ABC$ द्वारा अंतःखंडित चाप है। जीवा AB वृत्त को दो चापों में विभाजित करती है। दोनों चाप एक दूसरे के विपरीत चाप होते हैं। अब चाप ADB के विपरीत चाप पर एक बिंदु T लिया। उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार $\angle ABC = \frac{1}{2} m(\text{चाप ADB}) = \angle ATB$ ।

\therefore वृत्त की स्पर्शरेखा तथा स्पर्श बिंदु से खींची गई जीवा द्वारा बना कोण, उसी कोण द्वारा अंतःखंडित चाप के विपरीत चाप में अंतर्लिखित किए गए कोण के बराबर होता है।

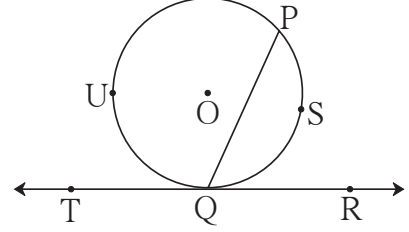
स्पर्श रेखा – छेदन रेखा कोण के प्रमेय का विलोम

किसी वृत्त की जीवा के एक अंत बिंदु से होकर जानेवाली रेखा खींचने पर, उस रेखा द्वारा उस जीवा पर बने कोण का माप उस कोण के अंतःखंडित चाप के माप का आधा हो, तो वह रेखा उस वृत्त की स्पर्श रेखा होती है।

आकृति 3.66 में,

यदि $\angle PQR = \frac{1}{2} m(\text{चाप PSQ})$ हो,

[अथवा $\angle PQT = \frac{1}{2} m(\text{चाप PUQ})$ हो]



आकृति 3.66

तो रेखा TR वृत्त की स्पर्श रेखा होती है। इस विलोम का उपयोग, वृत्त की स्पर्श रेखा खींचने की किसी रचना के लिए होता है।

जीवाओं का अंतःछेदन प्रमेय (Theorem of internal division of chords)

किसी वृत्त की दो जीवाएँ जब वृत्त के अंतःभाग में प्रतिच्छेदित करती हैं तब एक जीवा के दोनों भागों की लंबाईयों का गुणनफल दूसरी जीवा के बने दोनों भागों की लंबाईयों के गुणनफल के बराबर होता है।

दत्त : P केंद्रवाले वृत्त की जीवा AB और जीवा CD, वृत्त के अंतःभाग में स्थित बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करते हैं।

साध्य : $AE \times EB = CE \times ED$

रचना : रेख AC और रेख DB खींचिए।

उपपत्ति : $\triangle CAE$ और $\triangle BDE$ में,

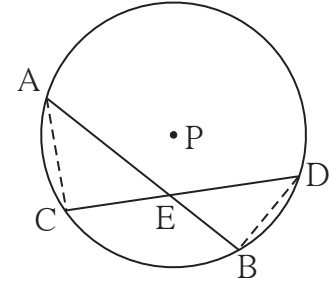
$\angle AEC \cong \angle DEB$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle CAE \cong \angle BDE$ (एक ही वृत्तचाप के अंतर्लिखित कोण)

$\therefore \triangle CAE \sim \triangle BDE$ (समरूपता की को-को कसौटी)

$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}$ (समरूप त्रिभुजों की संगत भुजा)

$\therefore AE \times EB = CE \times ED$



आकृति 3.67



थोड़ा सोचें

आकृति 3.67 में रेख AC और रेख DB खींचकर हमने प्रमेय सिद्ध किया। इसके स्थान पर क्या रेख AD और रेख CB खींच कर यह प्रमेय सिद्ध किया जा सकेगा ?

अधिक जानकारी हेतू

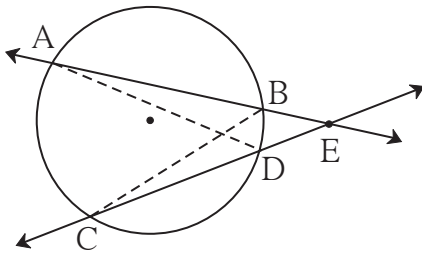
आकृति 3.67 में जीवा AB के, बिंदु E द्वारा AE और EB दो भाग हुए हैं। रेखा AE और रेखा EB संलग्न भुजाओं वाली आकृति बनाई, तो $AE \times EB$ उस आयत का क्षेत्रफल होगा। इसी प्रकार $CE \times ED$ जीवा CD के दो भागों द्वारा बनने वाले आयत का क्षेत्रफल होगा। हमने $AE \times EB = CE \times ED$ सिद्ध किया है।

इस प्रमेय को अन्य शब्दों में इस प्रकार कहा जा सकता है-

किसी वृत्त की दो जीवाएँ वृत्त के अंतःभाग में प्रतिच्छेदित करती हों, तो एक जीवा के दो रेखाखंडों द्वारा बनने वाले आयत का क्षेत्रफल दूसरी जीवा के दो रेखाखंडों द्वारा बनने वाले आयत के क्षेत्रफल के बराबर होता है।

जीवाओं का बहिर्छेदन प्रमेय (Theorem of external division of chords)

किसी वृत्त के AB और CD जीवा को समाविष्ट करने वाली प्रतिच्छेदन रेखाएँ एक दूसरे को वृत्त के बहिर्भाग में बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करती हों, तो $AE \times EB = CE \times ED$ ।



आकृति 3.68

प्रमेय के उपर्युक्त कथन और आकृति के आधार पर दत्त तथा साध्य स्वयं निश्चित कीजिए।

रचना : रेखा AD और रेखा BC खींचिए।

रिक्त स्थानों की पूर्ति कर नीचे दी गई उपपत्ति पूर्ण कीजिए।

उपपत्ति : $\triangle ADE$ और $\triangle CBE$ में,

$\angle AED \cong$ (समान्य कोण)

$\angle DAE \cong \angle BCE$ ()

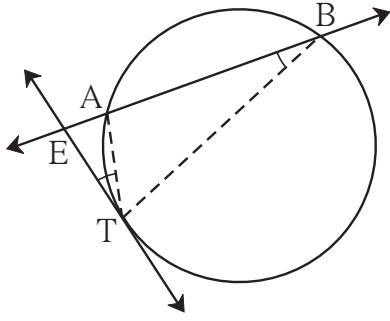
$\therefore \triangle ADE \sim$ ()

$\therefore \frac{l(AE)}{\text{}} = \frac{\text{}}{\text{}}$ (समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)

$\therefore \text{} = CE \times ED$

स्पर्शरेखा छेदन रेखा रेखाखंडों का प्रमेय (Tangent secant segments theorem)

यदि किसी वृत्त के बहिर्भाग में स्थित बिंदु E से खींची गई वृत्त की छेदन रेखा वृत्त को बिंदु A तथा B पर प्रतिच्छेदित करती हो और उसी बिंदु से होकर जाने वाली स्पर्शरेखा वृत्त को T बिंदु पर स्पर्श करती हो, तो $EA \times EB = ET^2$ ।



आकृति 3.69

प्रमेय के उपर्युक्त कथन को ध्यान में रखते हुए दत्त और साध्य निश्चित कीजिए।

रचना : रेख TA और रेख TB खींचिए।

उपपत्ति : ΔEAT और ΔETB में,

$$\angle AET \cong \angle TEB \dots (\text{सामान्य कोण})$$

$$\angle ETA \cong \angle EBT \dots (\text{स्पर्श रेखा-छेदन रेखा प्रमेय})$$

$$\therefore \Delta EAT \sim \Delta ETB \dots (\text{समरूपता की को-को कसौटी})$$

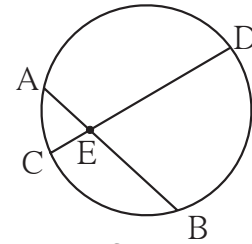
$$\therefore \frac{ET}{EB} = \frac{EA}{ET} \dots (\text{समरूप त्रिभुज की संगत भुजाएँ})$$

$$\therefore EA \times EB = ET^2$$

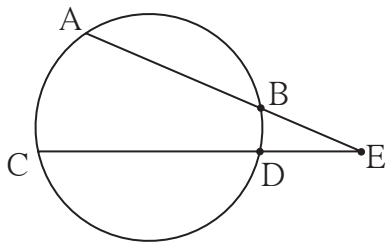


इसे ध्यान में रखें

- (1) आकृति 3.70 के अनुसार,
 $AE \times EB = CE \times ED$
 इस गुणधर्म को जीवा अंतःछेदन प्रमेय कहते हैं।



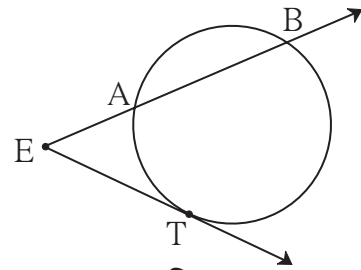
आकृति 3.70



आकृति 3.71

- (2) आकृति 3.71 के अनुसार,
 $AE \times EB = CE \times ED$
 इस गुणधर्म को जीवा बहिर्छेदन प्रमेय कहते हैं।

- (3) आकृति 3.72 के अनुसार,
 $EA \times EB = ET^2$
 इस गुणधर्म को स्पर्शरेखा-छेदन रेखा रेखाखंड का प्रमेय कहते हैं।



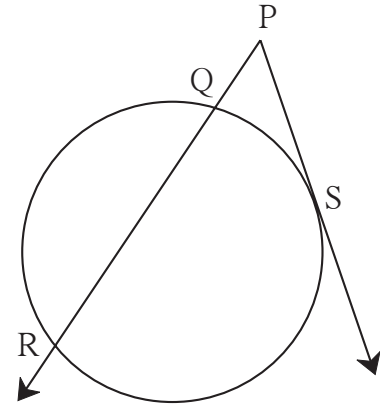
आकृति 3.72

उदा. (1) आकृति 3.73 में, रेखा PS स्पर्श रेखाखंड है।

रेखा PR वृत्त की छेदन रेखा है।

यदि PQ = 3.6,

QR = 6.4 तो PS = ? (कितना)



आकृति 3.73

हल : $PS^2 = PQ \times PR$ स्पर्शरेखा छेदन रेखा रेखाखंड प्रमेय

$$= PQ \times (PQ + QR)$$

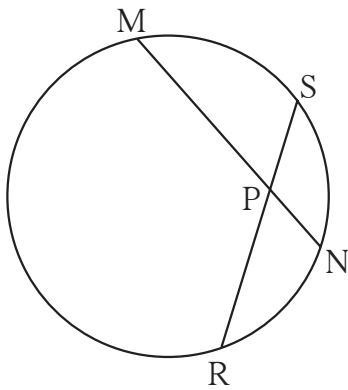
$$= 3.6 \times [3.6 + 6.4]$$

$$= 3.6 \times 10$$

$$= 36$$

$$\therefore PS = 6$$

उदा. (2)



आकृति 3.74

आकृति 3.74 में, जीवा MN और जीवा RS

एक दूसरे को बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं।

यदि PR = 6, PS = 4, MN = 11

तो PN ज्ञात कीजिए।

हल : जीवाओं के अंतःछेदन प्रमेय से,

$$PN \times PM = PR \times PS \dots (I)$$

$$\text{माना } PN = x \therefore PM = 11 - x$$

यह मान (I) में रखनेपर,

$$x(11 - x) = 6 \times 4$$

$$\therefore 11x - x^2 - 24 = 0$$

$$x^2 - 11x - 24 = 0$$

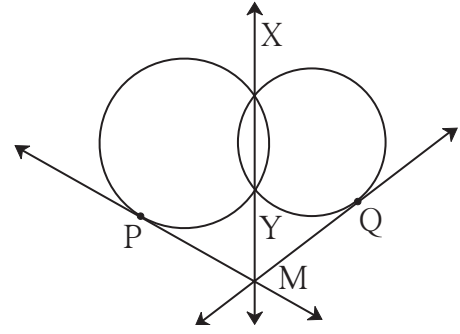
$$\therefore (x - 3)(x - 8) = 0$$

$$\therefore x - 3 = 0 \text{ या } x - 8 = 0$$

$$\therefore x = 3 \text{ या } x = 8$$

$$\therefore PN = 3 \text{ या } PN = 8$$

उदा. (3) आकृति 3.75 में, दो वृत्त एक दूसरे को बिंदु X तथा Y पर प्रतिच्छेदित करते हैं। रेखा XY पर स्थित बिंदु M से खींची गई स्पर्श रेखा उस वृत्त को बिंदु P तथा Q पर स्पर्श करती है। तो सिद्ध कीजिए,



आकृति 3.75

रेख $PM \cong$ रेख QM ।

हल : रिक्त स्थानों की पूर्ति कर उपपत्ति लिखिए ।

रेखा MX दोनों वृत्तों की सामान्य है ।

$$\therefore PM^2 = MY \times MX \dots (I)$$

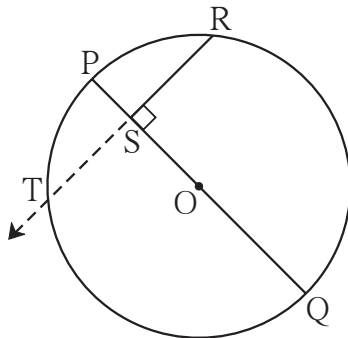
इसी प्रकार = \times , (स्पर्शरेखा - छेदन रेखा रेखाखंड प्रमेय) (II)

$$\therefore (I) \text{ तथा } (II) \text{ से } \dots = QM^2$$

$$\therefore PM = QM$$

रेख $PM \cong$ रेख QM

उदा. (4)



आकृति 3.76

आकृति 3.76 में, रेख PQ, 'O' केंद्रवाले वृत्त का व्यास है। बिंदु R वृत्त पर स्थित कोई एक बिंदु है।

रेख $RS \perp$ रेख PQ

तो सिद्ध कीजिए कि SR, PS तथा SQ का ज्यामितीय माध्य है।

$$[\text{अर्थात् } SR^2 = PS \times SQ]$$

हल : निम्नलिखित सोपानों के आधार पर उपपत्ति लिखिए ।

(1) किरण RS खींचिए। वह किरण वृत्त को जिस बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती है उस बिंदु को T नाम दीजिए।

(2) $RS = TS$ दर्शाइए।

(3) जीवाओं के अंतःछेदन प्रमेय का उपयोग कर समानता लिखिए।

(4) $RS = TS$ का उपयोग कर साध्य सिद्ध कीजिए।

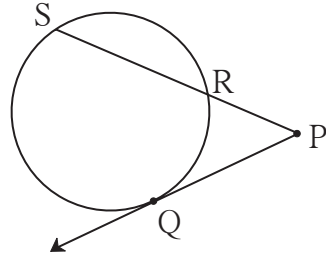


थोड़ा सोचें

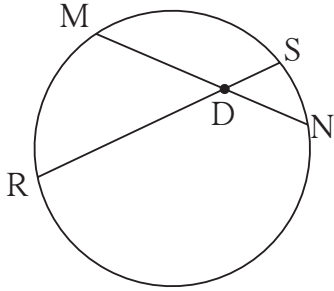
(1) उपर्युक्त आकृति 3.76 में रेख PR और रेख RQ खींचने पर ΔPRQ किस प्रकार का होगा ?

(2) क्या उपर्युक्त उदा. (4) में सिद्ध किया गया गुणधर्म इसके पहले भी भिन्न तरीके से सिद्ध किया है ?

1. आकृति 3.77 में, बिंदु Q एक स्पर्शबिंदु है।
यदि $PQ = 12$, $PR = 8$,
तो $PS =$ कितना ? $RS =$ कितना ?



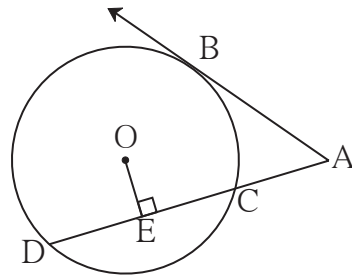
आकृति 3.77



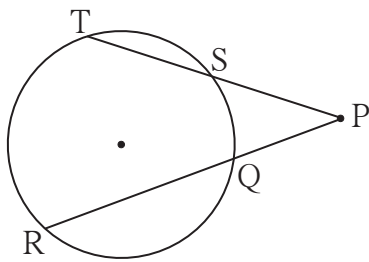
आकृति 3.78

2. आकृति 3.78 में, जीवा MN और RS एक दूसरे को बिंदु D पर प्रतिच्छेदित करते हैं।
(1) यदि $RD = 15$, $DS = 4$,
 $MD = 8$ तो $DN =$ कितना ?
(2) यदि $RS = 18$, $MD = 9$,
 $DN = 8$ तो $DS =$ कितना ?

3. आकृति 3.79 में, बिंदु B स्पर्श बिंदु और 'O' वृत्त का केंद्र है।
रेख $OE \perp$ रेख AD , $AB = 12$,
 $AC = 8$ तो
(1) AD (2) DC और
(3) DE = ज्ञात कीजिए।



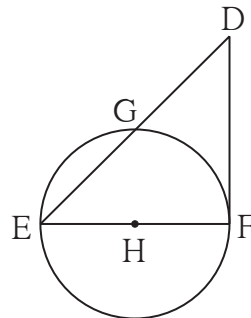
आकृति 3.79



आकृति 3.80

4. आकृति 3.80 में, यदि $l(PQ) = 6$,
 $QR = 10$, $PS = 8$
तो $TS =$ कितना ?

5. आकृति 3.81 में, रेख EF व्यास और रेख DF स्पर्श रेखाखंड है। वृत्त की त्रिज्या r हो, तो सिद्ध कीजिए -
 $DE \times GE = 4r^2$



आकृति 3.81

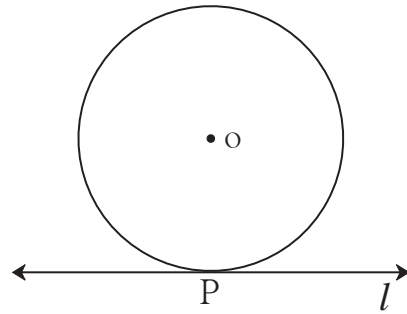
1. दिए गए प्रत्येक उप प्रश्न के लिए चार वैकल्पिक उत्तर दिए हैं। उनमें से उचित विकल्प चुनकर लिखिए।
 - (1) क्रमशः 5.5 सेमी और 3.3 सेमी त्रिज्या वाले दो वृत्त परस्पर स्पर्श करते हैं। उनके केंद्रों के बीच की दूरी कितने सेमी होगी ?
 (A) 4.4 (B) 8.8 (C) 2.2 (D) 5.5 या 2.2
 - (2) परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाले दो वृत्त एक दूसरे के केंद्र से होकर जाते हैं। यदि उनके केंद्रों के बीच की दूरी 12 सेमी हो, तो प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या कितने सेमी होगी ?
 (A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) बताया नहीं जा सकता
 - (3) 'यदि कोई वृत्त किसी समांतर चतुर्भुज की सभी भुजाओं को स्पर्श करता है, तो समांतर चतुर्भुज होना चाहिए', इस कथन में रिक्त स्थान में उचित शब्द लिखिए।
 (A) आयत (B) समचतुर्भुज (C) वर्ग (D) समलंब चतुर्भुज
 - (4) यदि किसी वृत्त के केंद्र से 12.5 सेमी की दूरी पर स्थित किसी बिंदु से उस वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाखंड की लंबाई 12 सेमी हो, तो उस वृत्त का व्यास कितने सेमी होगा ?
 (A) 25 (B) 24 (C) 7 (D) 14
 - (5) परस्पर बाह्य स्पर्श करने वाले दो वृत्तों में अधिक से अधिक कितनी स्पर्शरेखाएँ खींची जा सकती हैं ?
 (A) एक (B) दो (C) तीन (D) चार
 - (6) 'O' केंद्र वाले वृत्त के चाप ACB में $\angle ACB$ अंतर्लिखित किया गया है। यदि $m\angle ACB = 65^\circ$ तो $m(\text{चाप ACB}) =$ कितना ?
 (A) 65° (B) 130° (C) 295° (D) 230°
 - (7) किसी वृत्त की जीवाएँ AB और CD परस्पर वृत्त के अंतर्भाग में बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करती हैं। यदि $AE = 5.6$, $EB = 10$, $CE = 8$ तो $ED =$ कितना ?
 (A) 7 (B) 8 (C) 11.2 (D) 9
 - (8) चक्रीय $\square ABCD$ में $\angle A$ के माप का दुगुना $\angle B$ के माप के तिगुने के बराबर हो, तो $\angle C$ का माप कितना होगा ?
 (A) 36° (B) 72° (C) 90° (D) 108°
 - (9*) किसी वृत्त पर बिंदु A, B, C इस प्रकार है, कि $m(\text{चाप AB}) = m(\text{चाप BC}) = 120^\circ$ और दोनों चापों का कोई भी बिंदु सामान्य नहीं है। तो $\triangle ABC$ किस प्रकार का त्रिभुज है ?
 (A) समबाहु त्रिभुज (B) विषमबाहु त्रिभुज
 (C) समकोण त्रिभुज (D) समद्विबाहु त्रिभुज

(10) रेखा XZ व्यास वाले वृत्त के अन्तःभाग में एक बिंदु Y है। तो निम्नलिखित में से कितने कथन सत्य हैं?

- (1) $\angle XYZ$ न्यूनकोण नहीं हो सकता।
 - (2) $\angle XYZ$ समकोण नहीं हो सकता।
 - (3) $\angle XYZ$ अधिक कोण है।
 - (4) $\angle XYZ$ के माप के संदर्भ में कोई निश्चित कथन नहीं किया जा सकता।
- (A) सिर्फ एक (B) सिर्फ दो (C) सिर्फ तीन (D) सभी

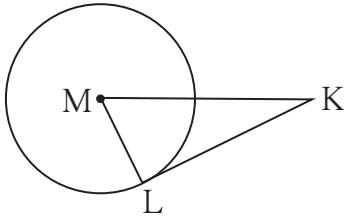
2. 'O' केंद्रवाले वृत्त को रेखा l , बिंदु P पर स्पर्श करती है। यदि वृत्त की त्रिज्या 9 सेमी हो, तो निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए।

- (1) $d(O, P) =$ कितना? क्यों?
- (2) यदि $d(O, Q) = 8$ सेमी हो, तो बिंदु Q का स्थान कहाँ होगा?
- (3) $d(O, R) = 15$ सेमी, हो तो रेखा l पर बिंदु R कितनी जगह पर हो सकता है? वे बिंदु P से कितनी दूरी पर होंगे?



आकृति 3.82

3.



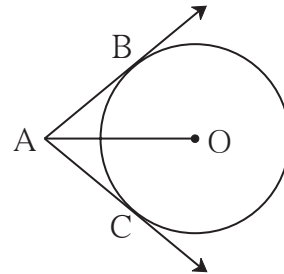
आकृति 3.83

संलग्न आकृति 3.83 में, बिंदु M वृत्त का केंद्र और रेखा KL स्पर्श रेखाखंड है।

यदि $MK = 12$, $KL = 6\sqrt{3}$ तो

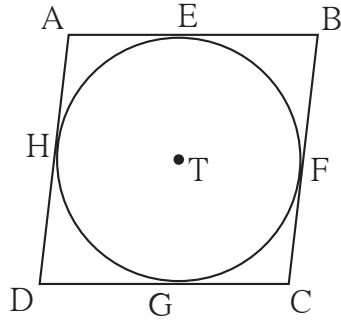
- (1) वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
- (2) $\angle K$ और $\angle M$ का माप ज्ञात कीजिए।

4. आकृति 3.84 में, बिंदु 'O' वृत्त का केंद्र और रेखा AB तथा रेखा AC स्पर्शरेखाखंड हैं। यदि वृत्त की त्रिज्या r और $AB = r$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि, $\square ABOC$ एक वर्ग है।



आकृति 3.84

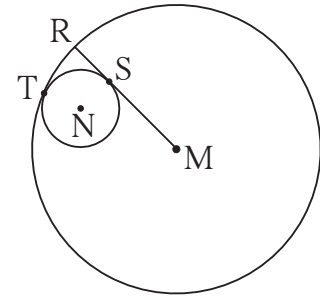
5.



आकृति 3.85

आकृति 3.85 में, T केंद्र वाले वृत्त के चारों ओर समांतर \square ABCD परिलिखित किया गया है। (अर्थात उस चतुर्भुज की चारों भुजाएँ वृत्त को स्पर्श करती हैं।) बिंदु E, F, G और H स्पर्श बिंदु है। यदि $AE = 4.5$ और $EB = 5.5$, तो AD का मान ज्ञात कीजिए।

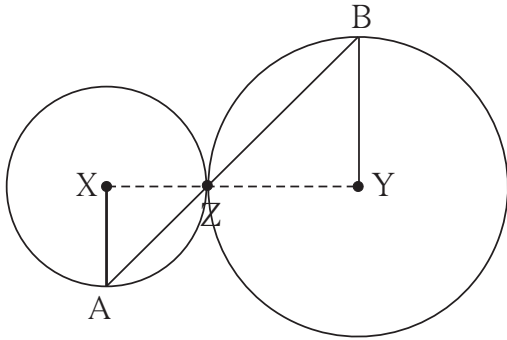
6. आकृति 3.86 में, N केंद्र वाला वृत्त M केंद्रवाले वृत्त को बिंदु T पर स्पर्श करता है। बड़े वृत्त की त्रिज्या छोटे वृत्त को बिंदु S पर स्पर्श करती है। यदि बड़े तथा छोटे वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 9 सेमी तथा 2.5 सेमी हो तो निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर ज्ञात कर इसके आधार पर $MS : SR$ का अनुपात ज्ञात कीजिए।



आकृति 3.86

- (1) $MT =$ कितना? (2) $MN =$ कितना?
 (3) $\angle NSM =$ कितना?

7. संलग्न आकृति में, X और Y केंद्रवाले वृत्त परस्पर Z बिंदु पर स्पर्श करते हैं। बिंदु Z से होकर जानेवाली वृत्त की छेदन रेखा उन वृत्तों को क्रमशः बिंदु A तथा बिंदु B पर प्रतिच्छेदित करती है। सिद्ध कीजिए कि त्रिज्या $XA \parallel$ त्रिज्या YB । नीचे दी गई उपपत्ति में रिक्त स्थानों की पूर्ति कर उपपत्ति को पूर्ण कीजिए।



आकृति 3.87

रचना : रेख XZ और खींचिए।

उपपत्ति : स्पर्शवृत्तों के प्रमेयानुसार, बिंदु X, Z, Y हैं।

$\therefore \angle XZA \cong$ (शीर्षाभिमुख कोण)

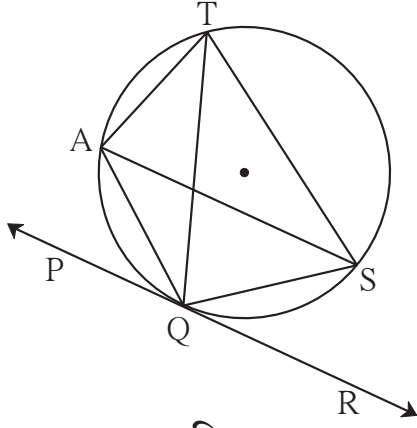
माना $\angle XZA = \angle BZY = a$ (I)

अब, रेख $XA \cong$ रेख XZ (.....)

$\therefore \angle XAZ =$ = a (समद्विबाहु त्रिभुज का प्रमेय) (II)

उसी प्रकार रेख $YB \cong$ (.....)

$\therefore \angle BZY =$ = a (.....) (III)



आकृति 3.91

13. आकृति 3.91 में, रेखा PR वृत्त को Q बिंदु पर स्पर्श करती है। आकृति के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए।

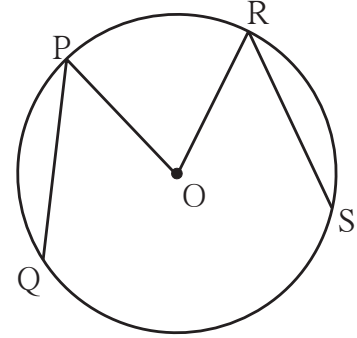
- (1) $\angle TAQ$ और $\angle TSQ$ के मापों का योगफल कितना होगा?
- (2) $\angle AQP$ के सर्वांगसम कोण का नाम बताइए।
- (3) $\angle QTS$ के सर्वांगसम कोण का नाम बताइए।

(4) यदि $\angle TAS = 65^\circ$, तो $\angle TQS$ और चाप TS के माप बताइए।

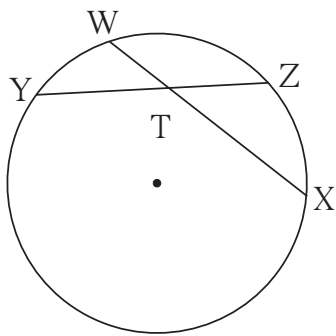
(5) यदि $\angle AQP = 42^\circ$ और $\angle SQR = 58^\circ$, तो $\angle ATS$ के माप ज्ञात कीजिए।

14. संलग्न आकृति में, O केंद्रवाले वृत्त में रेख PQ तथा रेख RS सर्वांगसम जीवा हैं। यदि $\angle POR = 70^\circ$ तथा $m(\text{चाप RS}) = 80^\circ$, तो -

- (1) $m(\text{चाप PR})$ कितना?
- (2) $m(\text{चाप QS})$ कितना?
- (3) $m(\text{चाप QSR})$ कितना?



आकृति 3.92

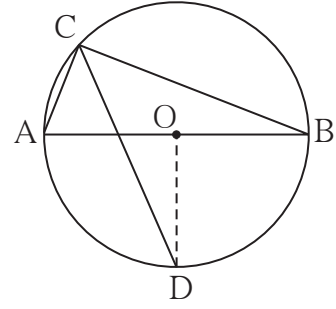


आकृति 3.93

15. आकृति 3.93 में, $m(\text{चाप WY}) = 44^\circ$, $m(\text{चाप ZX}) = 68^\circ$, तो

- (1) $\angle ZTX$ का माप ज्ञात कीजिए।
- (2) $WT = 4.8$, $TX = 8.0$, $YT = 6.4$ तो $TZ =$ कितना?
- (3) $WX = 25$, $YT = 8$, $YZ = 26$, तो $WT =$ कितना?

20. आकृति 3.98 में, रेख AB बिंदु O केंद्रवाले वृत्त का व्यास है। अंतर्लिखित $\angle ACB$ का समद्विभाजक वृत्त को D बिंदु पर प्रतिच्छेदित करता है। सिद्ध कीजिए कि रेख $AD \cong$ रेख BD । नीचे दी गई उपपत्ति में रिक्त स्थान की पूर्ति कर पूर्ण कीजिए ।

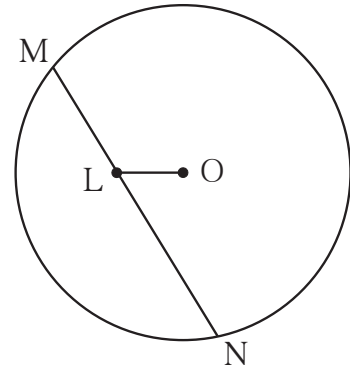


आकृति 3.98

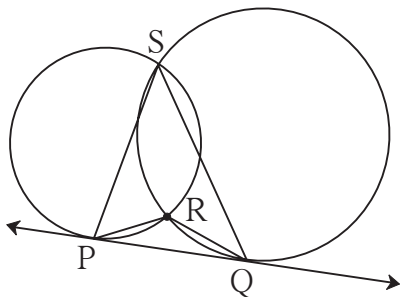
उपपत्ति : रेख OD खींचिए।

- $\angle ACB =$ (अर्धवृत्त में अंतर्लिखित कोण)
 $\angle DCB =$ (रेख CD, $\angle C$ का समद्विभाजक है)
 $m(\text{चाप DB}) =$ (अंतर्लिखित कोण का प्रमेय)
 $\angle DOB =$ (चाप के माप की परिभाषा) (I)
रेख $OA \cong$ रेख OB () (II)
 \therefore रेखा OD रेख AB की रेखा है। (I) तथा (II) से
 \therefore रेख $AD \cong$ रेख BD

21. संलग्न आकृति 3.99 में रेख MN 'O' केंद्रवाले वृत्त की जीवा है। $MN = 25$, जीवा MN पर बिंदु L इस प्रकार है कि, $ML = 9$ और $d(O, L) = 5$ तो इस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।

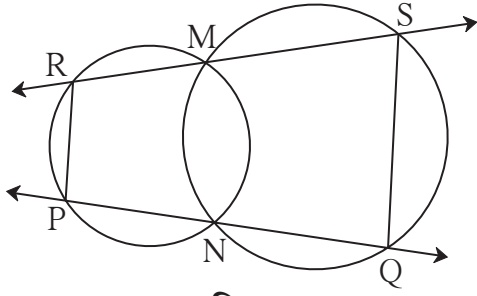


आकृति 3.99



आकृति 3.100

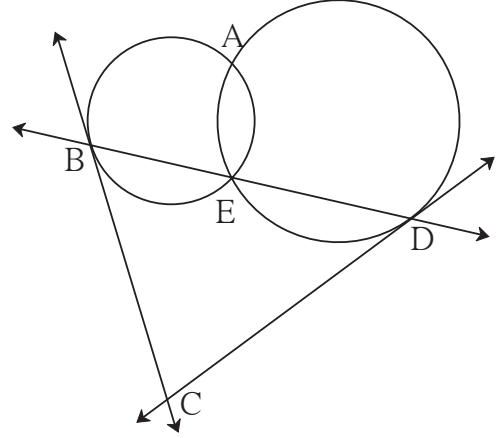
- 22*. आकृति 3.100 में दो वृत्त परस्पर बिंदु S तथा बिंदु R पर प्रतिच्छेदित करते हैं। रेखा PQ उन वृत्तों की सामान्य स्पर्श रेखा है जो उन्हें बिंदु P तथा Q पर स्पर्श करती है। सिद्ध कीजिए कि -
 $\angle PRQ + \angle PSQ = 180^\circ$



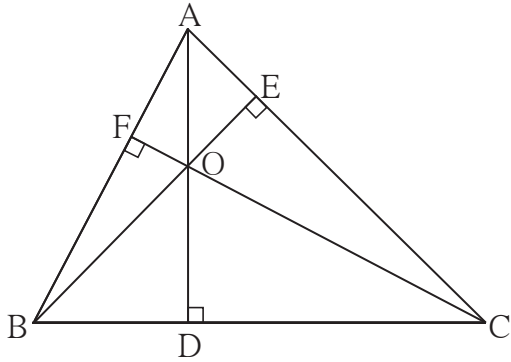
आकृति 3.101

23*. आकृति 3.101 में, दो वृत्त एक दूसरे को बिंदु M तथा N पर प्रतिच्छेदित करते हैं। यदि बिंदु M तथा N से खींची गई वृत्त की छेदन रेखाएँ वृत्तों के क्रमशः बिंदु R तथा S पर तथा बिंदु P तथा Q पर प्रतिच्छेदित करती हों तो सिद्ध कीजिए कि $PR \parallel QS$

24*. दो वृत्त परस्पर बिंदु A तथा बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करते हैं। बिंदु E से खींची गई सामान्य छेदन रेखा वृत्तों को बिंदु B तथा बिंदु D पर प्रतिच्छेदित करती है। बिंदु B तथा बिंदु D से खींची गई स्पर्श रेखाएँ परस्पर बिंदु C पर प्रतिच्छेदित करती हैं। सिद्ध कीजिए कि, $\square ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।



आकृति 3.102



आकृति 3.103

25*. ΔABC में, रेखा $AD \perp$ भुजा BC, रेखा $BE \perp$ भुजा AC, रेखा $CF \perp$ भुजा AB। बिंदु 'O' लंबपाद हो तो सिद्ध कीजिए कि, बिंदु 'O' ΔDEF का अंतःकेंद्र है।



ICT Tools or Links

जिओजेब्रा की सहायता से विविध वृत्त खींचिए।
उसमें जीवा तथा स्पर्श रेखा खींचकर गुणधर्म की जाँच कीजिए।





आओ सीखें

- समरूप त्रिभुजों की रचना
 - * दो समरूप त्रिभुजों में से किसी एक त्रिभुज की भुजाएँ और दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं का अनुपात दिया गया हो तो दूसरे की रचना करना ।
 - (i) एक भी शीर्षबिंदु सामान्य न होने पर ।
 - (ii) एक शीर्षबिंदु सामान्य होने पर ।
- वृत्त की स्पर्श रेखा खींचना
 - * वृत्त पर स्थित किसी बिंदु से वृत्त की स्पर्शरेखा खींचना ।
 - (i) वृत्त के केंद्र का उपयोग करते हुए ।
 - (ii) वृत्त के केंद्र का उपयोग न करते हुए ।
 - * वृत्त के बाह्य बिंदु से उस वृत्त पर स्पर्शरेखा खींचना ।



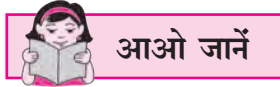
थोड़ा याद करें

पिछली कक्षाओं में हम नीचे दी गई रचना का अध्ययन कर चुके हैं । अब इन रचनाओं का पुनरावर्तन कीजिए ।

- दी गई रेखा के बाहर स्थित बिंदु से रेखा के समांतर रेखा खींचना ।
- दी गई रेखा का लंब समद्विभाजक खींचना ।
- त्रिभुज की भुजा तथा कोण में से पर्याप्त घटक दिए गए हों तो त्रिभुज की रचना करना ।
- दिए गए रेखाखंड का दी गई संख्या के आधार पर समान भाग करना ।
- दिए गए रेखाखंड का दिए गए अनुपात में विभाजन करना ।
- दिए गए कोण के सर्वांगसम कोण की रचना करना ।

कक्षा नौवीं में आपने परिसर का मानचित्र बनाने का उपक्रम किया है । किसी इमारत को बनाने के पूर्व उस इमारत की रूपरेखा तैयार करते हैं । विद्यालय का परिसर और उसका मानचित्र, इमारत और उसकी रूपरेखा परस्पर समरूप होते हैं । भूगोल, वास्तुशास्त्र, यंत्रशास्त्र आदि क्षेत्रों में समरूप आकृतियों को बनाने की आवश्यकता होती है । त्रिभुज सबसे सरल बंद आकृति है । इसलिए दिए गए त्रिभुजों के समरूप त्रिभुज कैसे बनाए जाते हैं, इसे देखेंगे ।

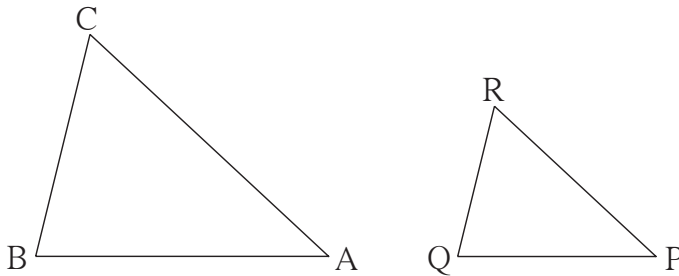




समरूप त्रिभुजों की रचना

किसी त्रिभुज की भुजाएँ दी गई हों, तो उसके समरूप एवं अनुपात की शर्त पूरी करने वाले त्रिभुज की रचना करना ।
दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपात में होती हैं और उनके संगत कोण सर्वांगसम होते हैं । इस कथन का उपयोग करके दिए गए त्रिभुज के समरूप त्रिभुज की रचना की जा सकती है ।

उदा. (1) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, ΔABC में $AB = 5.4$ सेमी, $BC = 4.2$ सेमी, $AC = 6.0$ सेमी ।
 $AB: PQ = 3:2$ तो ΔABC और ΔPQR की रचना कीजिए ।



आकृति 4.1
कच्ची आकृति

सर्वप्रथम दिए गए माप के अनुसार ΔABC की रचना कीजिए ।

ΔABC और ΔPQR समरूप हैं ।

\therefore उनकी संगत भुजाएँ समानुपात में हैं ।

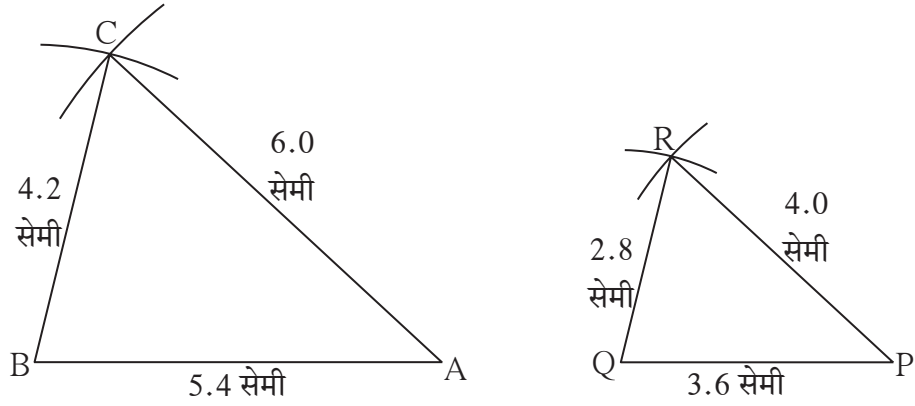
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{3}{2} \dots\dots\dots (I)$$

AB, BC, AC इन भुजाओं की लंबाई ज्ञात होने पर उपर्युक्त समीकरण से PQ, QR, PR भुजाओं की लंबाई प्राप्त होगी ।

समीकरण [I] से

$$\frac{5.4}{PQ} = \frac{4.2}{QR} = \frac{6.0}{PR} = \frac{3}{2}$$

$\therefore PQ = 3.6$ सेमी, $QR = 2.8$ सेमी और $PR = 4.0$ सेमी



आकृति 4.2

ΔPQR की सभी भुजाओं की लंबाई ज्ञात होने पर हम उस त्रिभुज की रचना कर सकते हैं।

अधिक जानकारी हेतू :

कई बार दिए गए त्रिभुज के समरूप रचना किए जाने वाले त्रिभुज की भुजाओं की लंबाई मापन पट्टी से मापन संभव नहीं होता। ऐसे समय दिए गए रेखाखंड के 'दिए गए संख्यानुसार समान भाग करना' इस रचना का उपयोग कर त्रिभुज की भुजा ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरणार्थ, भुजा AB की लंबाई $\frac{11.6}{3}$ सेमी हो, तो 11.6 सेमी लंबाई वाले रेखाखंड के 3 समान भाग कर रेखा AB ज्ञात कर सकते हैं।

उपर्युक्त उदा. (1) में रचना में दिए गए तथा खींचे जाने वाले त्रिभुजों में सामान्य शीर्ष बिंदु नहीं होता। एक शीर्ष बिंदु सामान्य हो तो त्रिभुज की रचना दिए गए उदाहरण में दर्शाए अनुसार करना सुविधाजनक होता है।

उदा.(2) एक ΔABC की रचना कीजिए।

ΔABC के समरूप $\Delta A'BC'$ की रचना ऐसे कीजिए कि

$$AB : A'B = 5:3$$

स्पष्टीकरण : एकरेखीय बिंदु B, A', A की तरह ही बिंदु B, C', C लीजिए।

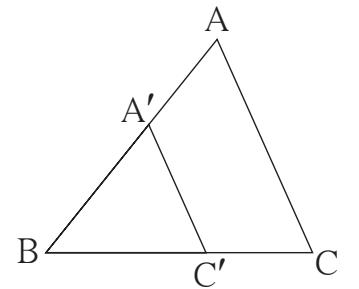
$$\Delta ABC \sim \Delta A'BC' \therefore \angle ABC = \angle A'BC'$$

$$\frac{AB}{A'B} = \frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{5}{3}$$

$\therefore \Delta ABC$ की भुजाएँ $\Delta A'BC'$ की संगत भुजाओं से बड़ी होगी।

\therefore रेखा BC के 5 समान भाग करने पर उसके तीन समान भाग के बराबर रेखा BC' की लंबाई होगी।

ΔABC खींचकर रेखा BC पर बिंदु B से तीन भाग के बराबर दूरी पर बिंदु C' होना चाहिए। बिंदु C' से रेखा AC के समांतर खींची गई रेखा, रेखा BA को जिस बिंदु पर प्रतिच्छेदित करेगी वह बिंदु A' होगा।



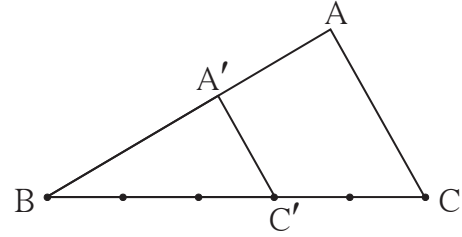
आकृति 4.3

कच्ची आकृति

$$\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{5} \text{ अर्थात, } \frac{BA}{BA'} = \frac{BC}{BC'} = \frac{5}{3} \dots\dots\dots \text{ विपर्य स्थानुपात से}$$

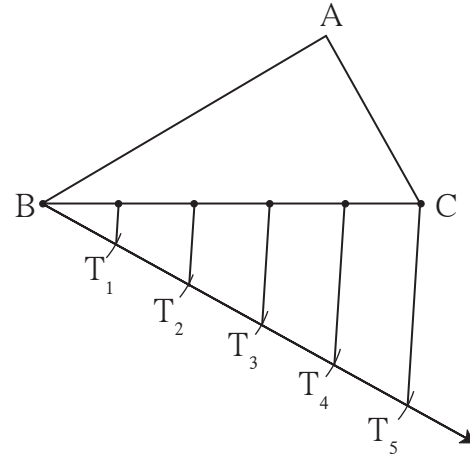
रचना के सोपान :

- (1) किसी ΔABC की रचना कीजिए ।
- (2) रेख BC के पाँच समान भाग कीजिए ।
- (3) बिंदु B से तीसरे बिंदु को C' नाम दीजिए ।
 $\therefore BC' = \frac{3}{5} BC$
- (4) अब C' से रेख CA के समांतर रेखा खींचिए । यह रेख AB को जहाँ प्रतिच्छेदित करती है, उस बिंदु को A' नाम दीजिए ।
- (5) ΔABC के समरूप $\Delta A'BC'$ यही अभीष्ट त्रिभुज है ।



आकृति 4.4

टीप : रेख BC के पाँच समान भाग करने पर, रेख BC के जिस ओर बिंदु A है उसके विपरीत ओर बिंदु B से एक किरण खींचकर उसे विभाजित करना सुविधाजनक होता है । उस किरण पर $BT_1 = T_1T_2 = T_2T_3 = T_3T_4 = T_4T_5$ ऐसे समान भाग लीजिए । T_5C जोड़े तथा T_1, T_2, T_3, T_4 से T_5C के समांतर रेखा खींचिए ।

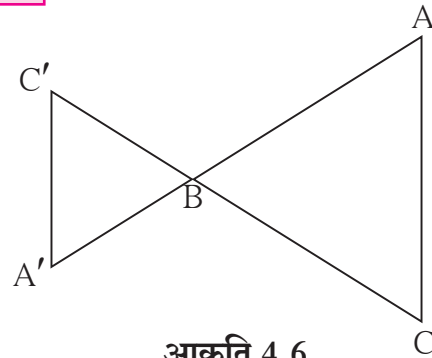


आकृति 4.5



थोड़ा सोचें

समरूप त्रिभुज की रचना करने के लिए संलग्न आकृति में दर्शाएनुसार $\Delta A'BC'$ खींच सकते हैं । इस आकृति के अनुसार $\Delta A'BC'$ की रचना करनी हो तो रचना के सोपान में कौन-सा बदलाव करना होगा ?



आकृति 4.6

उदा.(3) ΔABC के समरूप $\Delta A'BC'$ की रचना इस प्रकार कीजिए कि $AB : A'B = 5:7$

स्पष्टीकरण : एकरेखीय बिंदु B, A, A' की तरह ही बिंदु B, C, C' लीजिए ।

$\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$ और $AB : A'B = 5:7$

$\therefore \Delta ABC$ की भुजा $\Delta A'BC'$ की संगत भुजाओं से छोटी होगी

उसी प्रकार $\angle ABC \cong \angle A'BC'$

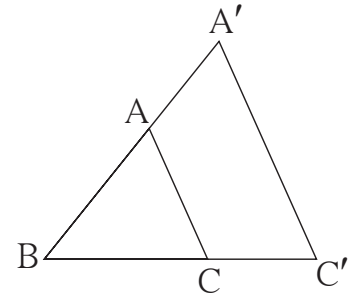
इस मुद्दे को ध्यान में रखकर कच्ची आकृति बनाएँ ।

अब $\frac{BC}{BC'} = \frac{5}{7}$

\therefore रेख BC के 5 समान भाग करे तो उनमें से किसी एक भाग का 7 गुना रेख BC' की लंबाई होगी ।

$\therefore \Delta ABC$ खींचकर रेख BC के पाँच समान भाग करें । बिंदु C' किरण BC पर बिंदु B से सात भाग की दूरी पर होगा ।

समानुपात के मूलभूत प्रमेय के अनुसार बिंदु C' से भुजा AC के समांतर रेखा खींचें तो वह बढ़ी हुई किरण BA को जिस बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती है, वह बिंदु A' होगा । रेख A'C' खींचने पर $\Delta A'BC'$ अभीष्ट (अपेक्षित) त्रिभुज प्राप्त होगा ।



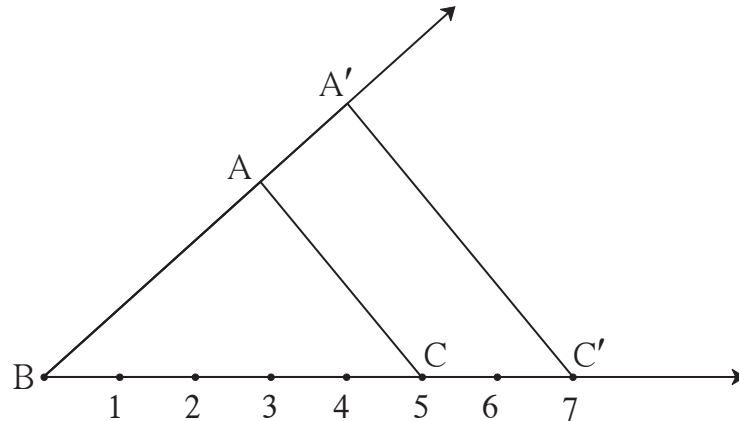
आकृति 4.7

कच्ची आकृति

रचना के सोपान :

- (1) ΔABC बनाइए ।
- (2) रेख BC के पाँच समान भाग कीजिए । किरण BC पर बिंदु C' इस प्रकार लें, कि रेख BC' की लंबाई रेख BC के एक भाग की सात गुना हो ।
- (3) रेख AC के C' से समांतर रेखा खींचिए । यह रेखा किरण BA को जहाँ प्रतिच्छेदित करती है, उस बिंदु को A' नाम दीजिए ।

$\Delta A'BC'$ यह ΔABC के समरूप अभीष्ट त्रिभुज है ।



आकृति 4.8

1. $\Delta ABC \sim \Delta LMN$, ΔABC में $AB = 5.5$ सेमी, $BC = 6$ सेमी, $CA = 4.5$ सेमी और $\frac{BC}{MN} = \frac{5}{4}$ तो ΔABC तथा ΔLMN की रचना कीजिए।
2. $\Delta PQR \sim \Delta LTR$, ΔPQR में $PQ = 4.2$ सेमी, $QR = 5.4$ सेमी, $PR = 4.8$ सेमी और $\frac{PQ}{LT} = \frac{3}{4}$ तो ΔPQR तथा ΔLTR की रचना कीजिए।
3. $\Delta RST \sim \Delta XYZ$, ΔRST में $RS = 4.5$ सेमी, $\angle RST = 40^\circ$, $ST = 5.7$ सेमी और $\frac{RS}{XY} = \frac{3}{5}$ तो ΔRST तथा ΔXYZ की रचना कीजिए।
4. $\Delta AMT \sim \Delta AHE$, ΔAMT में $AM = 6.3$ सेमी, $\angle TAM = 50^\circ$, $AT = 5.6$ सेमी और $\frac{AM}{AH} = \frac{7}{5}$ तो ΔAHE की रचना कीजिए।

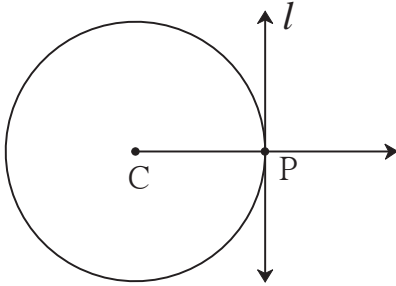


आओ जानें

वृत्त पर स्थित किसी बिंदु से वृत्त की स्पर्शरेखा खींचना

(i) वृत्त केंद्र का उपयोग करते हुए :

स्पष्टीकरण :



आकृति 4.9

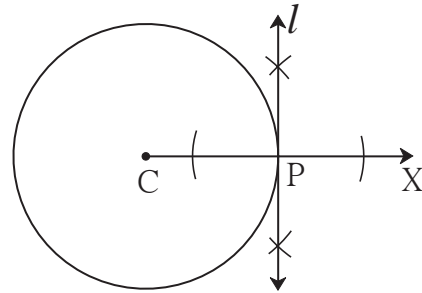
माना C केंद्रवाले वृत्तपर स्थित बिंदु P से जानेवाली, स्पर्श रेखा l खींचना है।

त्रिज्या के बाह्य छोर से खींची गई लंब रेखा उस वृत्त की स्पर्श रेखा होती है, इस गुणधर्म का उपयोग कीजिए। त्रिज्या CP खींची तो रेखा $CP \perp$ रेखा l अर्थात् त्रिज्या CP पर बिंदु P से जाने वाली लंब रेखा ही अभीष्ट स्पर्शरेखा होगी।

रेखा पर दी गई बिंदु से जाने वाली, उस रेखा पर लंब रेखा की रचना यहाँ करनी पड़ेगी। इसलिए सुविधा के लिए किरण CP खींचकर रेखा l की रचना करें।

रचना के सोपान :

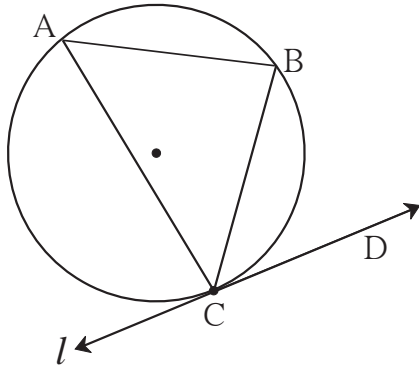
- (1) C केंद्रवाला एक वृत्त खींचिए, उसपर एक बिंदु P लीजिए।
- (2) किरण CP खींचिए।
- (3) बिंदु P से किरण CX पर लंब रेखा l खींचिए। रेखा l , बिंदु P से जानेवाली वृत्त की अभीष्ट स्पर्शरेखा है।



आकृति 4.10

(ii) वृत्त केंद्र का उपयोग न करते हुए :

उदाहरण : उचित त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचिए, उसपर कोई एक बिंदु C लीजिए। वृत्त केंद्र का उपयोग न करते हुए बिंदु C से होकर जाने वाली उस वृत्त की स्पर्शरेखा खींचिए।



आकृति 4.11

यदि $\angle CAB \cong \angle BCD$, तो रेखा l यह वृत्त की स्पर्श रेखा होती है।

अर्थात् रेख CB वृत्त की जीवा और $\angle CAB$ अंतर्लिखित कोण खींचिए। $\angle BCD$ की रचना इस प्रकार करें कि, $\angle BCD \cong \angle BAC$

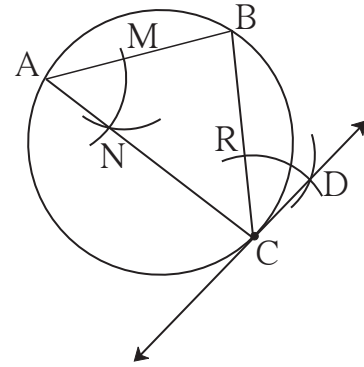
रेखा CD यह दिए गए वृत्त के बिंदु C से जाने वाली उस वृत्त की स्पर्श रेखा होगी।

स्पष्टीकरण :

माना आकृति में दर्शाए अनुसार रेखा l बिंदु C से जाने वाली स्पर्श रेखा है। रेख CB जीवा और $\angle CAB$ अंतर्लिखित कोण खींचिए। स्पर्श रेखा छेदन रेखा कोण प्रमेय के अनुसार $\angle CAB \cong \angle BCD$ । स्पर्श रेखा-छेदन रेखा कोण प्रमेय के विलोम अनुसार ,

रचना के सोपान :

- (1) एक वृत्त खींचकर उसपर कोई एक बिंदु C लीजिए।
- (2) जीवा CB और अंतर्लिखित $\angle CAB$ खींचिए।
- (3) बिंदु A केंद्र तथा उचित (सुविधाजनक) त्रिज्या लेकर $\angle BAC$ की भुजाओं को बिंदु M तथा बिंदु N पर प्रतिच्छेदित करने वाला चाप खींचिए।
- (4) वही त्रिज्या तथा बिंदु C को केंद्र मानकर जीवा CB को प्रतिच्छेदित करने वाला चाप खींचिए उस प्रतिच्छेदन बिंदु को R नाम दीजिए।
- (5) कंपास में MN के बराबर त्रिज्या लीजिए। केंद्र R लेकर पहले खींचे गए चाप को प्रतिच्छेदित करने वाला एक और चाप खींचिए। उस प्रतिच्छेदन बिंदु को D नाम दीजिए। रेखा CD खींचिए। रेखा CD यह वृत्त की स्पर्श रेखा है।

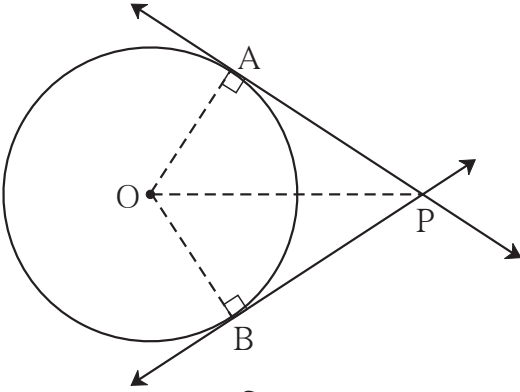


आकृति 4.12

(उपर्युक्त आकृति में $\angle MAN \cong \angle BCD$ के कारण को ध्यान में रखिए। रेखाखंड MN तथा रेखाखंड RD खींचने पर - भु भु भु कसौटी के अनुसार $\Delta MAN \cong \Delta RCD$. $\therefore \angle MAN \cong \angle BCD$)

वृत्त के बाह्य भाग में स्थित किसी बिंदु से वृत्त पर स्पर्शरेखा खींचना

स्पष्टीकरण :



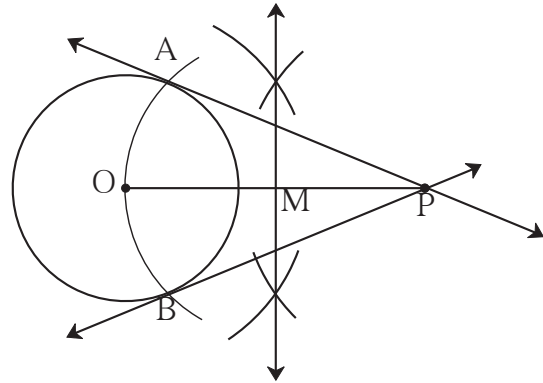
आकृति 4.13

माना, आकृति में दर्शाए अनुसार 'O' केंद्रवाले वृत्त के बाह्यभाग में एक बिंदु P स्थित है। बिंदु P से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा वृत्त को बिंदु A तथा बिंदु B पर स्पर्श करती है। वृत्त पर बिंदु A तथा बिंदु B का स्थान निश्चित हो जाने पर स्पर्श रेखा PA और PB खींची जा सकती है। क्योंकि त्रिज्या OA और OB खींचा तो त्रिज्या $OA \perp$ रेखा PA और त्रिज्या $OB \perp$ रेखा PB.

समकोण ΔOAP तथा ΔOBP में, OP यह दोनों त्रिभुज के कर्ण हैं। यदि रेख OP व्यास वाला वृत्त खींचा तो वह O केंद्रवाले वृत्त को जिन बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करेंगे वे बिंदु A और B होंगे, क्योंकि अर्धवृत्त में अंतर्लिखित कोण समकोण होता है।

रचना के सोपान :

- (1) 'O' केंद्र तथा उचित माप की त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचिए।
 - (2) वृत्त के बाहर एक बिंदु P लीजिए।
 - (3) रेख OP खींचिए। रेख OP का लंब समद्विभाजक खींचकर मध्य बिंदु M प्राप्त कीजिए।
 - (4) केंद्र M तथा त्रिज्या OM लेकर वृत्त चाप बनाइए।
 - (5) यह वृत्त चाप दिए गए वृत्त को बिंदु A और बिंदु B पर प्रतिच्छेदित करेगा।
 - (6) रेखा PA तथा रेखा PB खींचिए।
- रेखा PA तथा रेखा PB वृत्त की अभीष्ट स्पर्शरेखाएँ हैं।



आकृति 4.14

प्रश्नसंग्रह 4.2

1. बिंदु P केंद्र और त्रिज्या 3.2 सेमी लेकर वृत्त पर स्थित बिंदु M से जानेवाली स्पर्शरेखा खींचिए।
2. 2.7 सेमी त्रिज्या वाला एक वृत्त बनाइए। इस वृत्त पर स्थित एक बिंदु से वृत्त पर स्पर्शरेखा खींचिए।
3. 3.6 सेमी त्रिज्या वाला एक वृत्त खींचिए। वृत्त केंद्र का उपयोग न करते हुए वृत्त पर स्थित किसी बिंदु से वृत्त की स्पर्श रेखा खींचिए।
4. 3.3 सेमी त्रिज्यावाला एक वृत्त बनाइए। वृत्त में 6.6 सेमी लंबाई वाली एक जीवा PQ खींचिए। स्पर्श रेखा के संदर्भ में अपने निरीक्षण दर्ज कीजिए।

5

निर्देशांक भूमिति



आओ सीखें

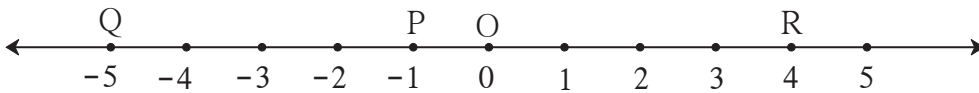
- दूरी सूत्र
- विभाजन सूत्र
- रेखा का ढाल



थोड़ा याद करें

हम संख्या रेखा पर स्थित दो बिंदुओं के बीच की दूरी मापना जानते हैं।

बिंदुओं P, Q और R के निर्देशांक क्रमशः -1, -5 और 4 हो तो रेखा PQ, और रेखा QR की दूरी ज्ञात कीजिए।



आकृति 5.1

बिंदु A और B के निर्देशांक क्रमशः x_1 और x_2 हैं और $x_2 > x_1$ हो तो

रेखाखंड AB की दूरी = $d(A, B) = x_2 - x_1$

आकृति में दर्शाए अनुसार बिंदु P, Q और R के निर्देशांक क्रमशः -1, -5 और 4 हैं।

$$\therefore d(P, Q) = (-1) - (-5) = -1 + 5 = 4$$

$$\text{और } d(Q, R) = 4 - (-5) = 4 + 5 = 9$$

इसी संकल्पना का उपयोग करके हम प्रतल XY में स्थित तथा एक ही अक्ष पर स्थित दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करेंगे।



आओ जानें

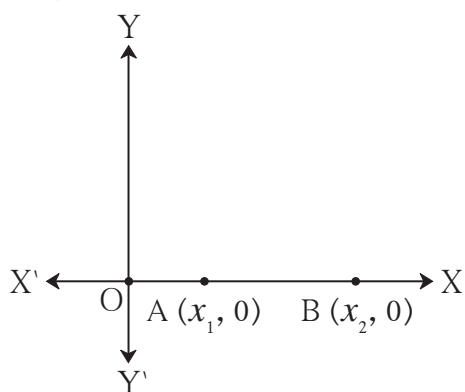
(1) एक ही अक्ष पर स्थित दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना :

एक ही अक्ष पर दो बिंदु अर्थात एक ही संख्या रेखा पर दो बिंदु। यह ध्यान में रखें कि X अक्ष पर स्थित बिंदुओं के निर्देशांक $(2, 0)$, $(\frac{-5}{2}, 0)$, $(8, 0)$ हैं, और Y अक्ष पर स्थित बिंदुओं के निर्देशांक $(0, 1)$,

$(0, \frac{17}{2})$ और $(0, -3)$ होते हैं।

X अक्ष का ऋण निर्देशांक दर्शाने वाला भाग किरण OX' है तथा Y अक्ष का ऋण निर्देशांक दर्शाने वाला भाग किरण OY' है।

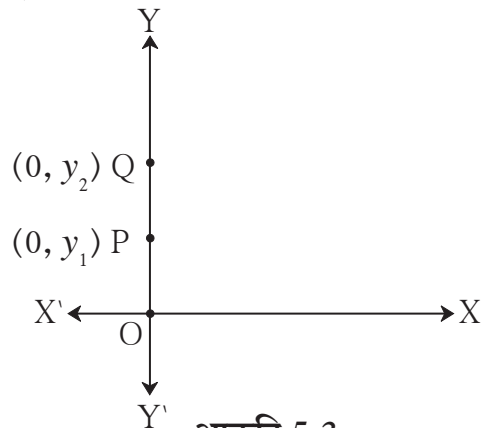
(i) X-अक्ष पर स्थित दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना ।



आकृति 5.2

उपर्युक्त आकृति में,
 $A(x_1, 0)$ और $B(x_2, 0)$ ये दो बिंदु
 X- अक्ष पर इस प्रकार हैं कि, $x_2 > x_1$
 $\therefore d(A, B) = x_2 - x_1$

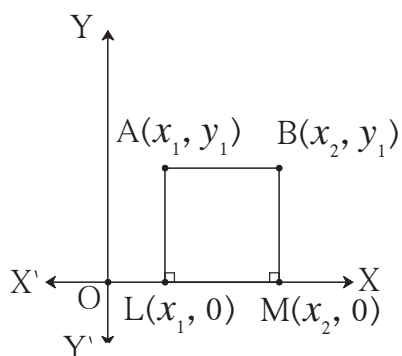
(ii) Y-अक्ष पर स्थित दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना ।



आकृति 5.3

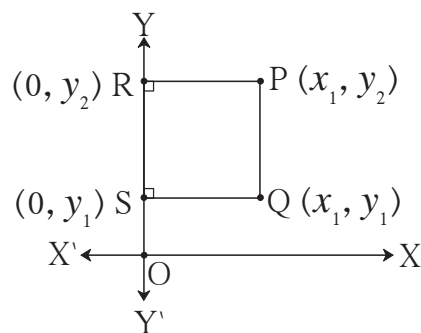
उपर्युक्त आकृति में,
 $P(0, y_1)$ और $Q(0, y_2)$ ये दो बिंदु
 Y- अक्ष पर इस प्रकार हैं, $y_2 > y_1$
 $\therefore d(P, Q) = y_2 - y_1$

(2) दो बिंदुओं को जोड़ने वाले प्रतल XY पर स्थित रेखाखंड किसी एक अक्ष के समांतर हों तो उन दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना ।



आकृति 5.4

(i) आकृति में रेखा AB यह X- अक्ष के समांतर है । इसीलिए बिंदु A तथा बिंदु B के y निर्देशांक समान हैं ।
 X-अक्ष पर रेखा AL और रेखा BM लंब खींचिए ।
 $\therefore \square ABML$ एक आयत है ।
 $\therefore AB = LM$
 परंतु, $LM = x_2 - x_1$
 $\therefore d(A, B) = x_2 - x_1$



आकृति 5.5

(ii) आकृति में रेखा PQ यह Y- अक्ष के समांतर है । इसीलिए बिंदु P और बिंदु Q के x निर्देशांक समान हैं ।
 Y-अक्ष पर रेखा PR और रेखा QS लंब खींचिए ।
 $\therefore \square PQSR$ एक आयत है ।
 $\therefore PQ = RS$
 परंतु, $RS = y_2 - y_1$
 $\therefore d(P, Q) = y_2 - y_1$

कृति :

आकृति में रेख AB \parallel Y-अक्ष और रेख CB \parallel X-अक्ष है। बिंदु A और C के निर्देशांक दिए गए हैं।

AC ज्ञात करने के लिए नीचे दी गई चौखटों में लिखिए।

ΔABC समकोण त्रिभुज है।

पायथागोरस के प्रमेयानुसार,

$(AB)^2 + (BC)^2 = \square$

AB और BC प्राप्त करने के लिए बिंदु B के निर्देशांक ज्ञात करेंगे।

CB \parallel X- अक्ष \therefore B का y निर्देशांक = \square

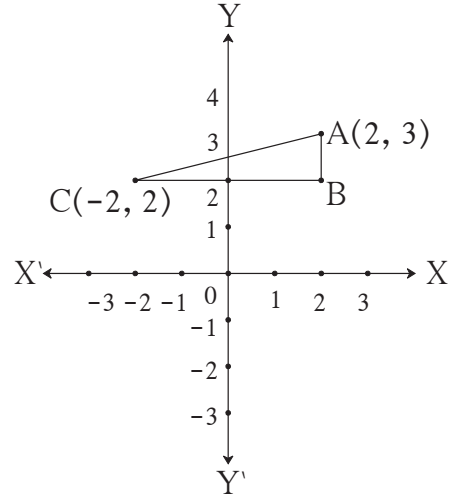
BA \parallel Y- अक्ष \therefore B का x निर्देशांक = \square

AB = $\square - \square = \square$

BC = $\square - \square = \square$

$\therefore AC^2 = \square + \square = \square$

$\therefore AC = \square$

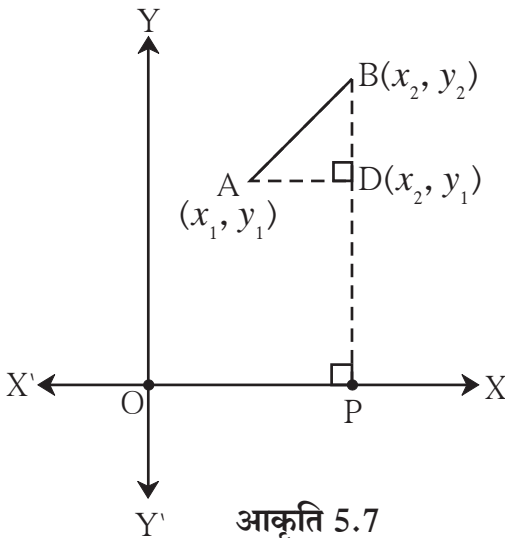


आकृति 5.6



आओ जानें

दूरी सूत्र (Distance formula)



आकृति 5.7

आकृति 5.7 में, $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ यह प्रतल XY पर स्थित कोई दो बिंदु हैं।

बिंदु B से X-अक्ष पर BP लंब खींचिए। उसी प्रकार बिंदु A से रेखा BP पर AD लंब खींचिए जो Y-अक्ष के समांतर हो।

\therefore बिंदु D का x निर्देशांक x_2 है।

रेख AD यह X-अक्ष समांतर है।

\therefore बिंदु D का y निर्देशांक y_1 है।

$\therefore AD = d(A, D) = x_2 - x_1,$

$BD = d(B, D) = y_2 - y_1$

समकोण ΔABD में, पायथागोरस के प्रमेय से

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

इस निष्कर्ष को दूरी सूत्र कहते हैं।

$$\text{यह ध्यान में रखें कि, } \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

आकृति 5.6 की कृति में हमने रेखा AC की लंबाई ज्ञात करने के लिए AB और BC की लंबाई ज्ञात कर पायथागोरस के प्रमेय का उपयोग किया था। अब दूरी-सूत्र की सहायता से हम उन रेखाखंडों की लंबाई ज्ञात करेंगे।

A(2, 3) और C(-2, 2) दिए गए हैं।

माना A(x₁, y₁) और C(x₂, y₂)

$$x_1 = 2, y_1 = 3, x_2 = -2, y_2 = 2$$

दूरी सूत्र से,

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-2 - 2)^2 + (2 - 3)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{16 + 1} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

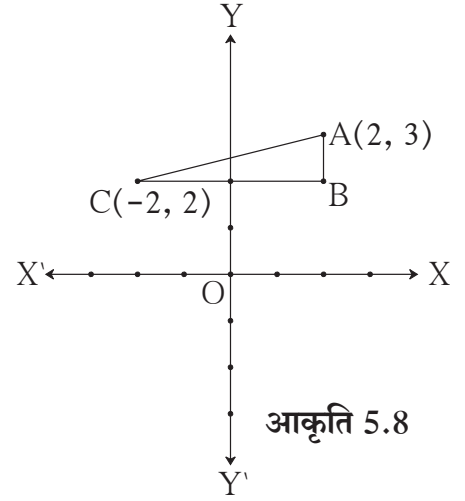
रेखा AB || Y-अक्ष और रेखा BC || X-अक्ष

∴ बिंदु B का निर्देशांक (2, 2) है।

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - 2)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{0 + 1} = 1$$

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 0} = 4$$

आकृति 5.1 में बिंदु P तथा बिंदु Q की दूरी (-1) - (-5) = 4; हमने ज्ञात किया था। इसी बिंदु के निर्देशांक प्रतल में (-1, 0) तथा (-5, 0) रहेंगे। दूरी सूत्र की सहायता से बिंदु P तथा बिंदु Q की दूरी उतनी ही रहेगी, इसकी जांच कीजिए।



इसे ध्यान में रखें

- आरंभ बिंदु O के निर्देशांक (0, 0) होते हैं। अर्थात् P के निर्देशांक (x, y) हो तो,
d(O, P) = $\sqrt{x^2 + y^2}$.
- P(x₁, y₁), Q(x₂, y₂) ये दोनों बिंदु प्रतल XY में स्थित हों तो
d(P, Q) = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
अर्थात्, PQ² = (x₂ - x₁)² + (y₂ - y₁)² = (x₁ - x₂)² + (y₁ - y₂)²

उदा. (7) यदि बिंदु (x, y) यह $(7, 1)$ और $(3, 5)$ से समान दूरी पर हो, तो सिद्ध कीजिए कि $y = x - 2$
हल : माना, P (x, y) यह बिंदु A $(7, 1)$ और B $(3, 5)$ से समान दूरी पर है।

$$\therefore AP = BP$$

$$\therefore AP^2 = BP^2$$

$$\therefore (x - 7)^2 + (y - 1)^2 = (x - 3)^2 + (y - 5)^2$$

$$\therefore x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$

$$\therefore -8x + 8y = -16$$

$$\therefore x - y = 2$$

$$\therefore y = x - 2$$

उदा. (8) बिंदु A $(2, -2)$ और बिंदु B $(-1, y)$ के बीच की दूरी 5 है, तो y का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\therefore AB^2 = [(-1) - 2]^2 + [y - (-2)]^2 \dots\dots\dots$ दूरी सूत्रानुसार

$$\therefore 5^2 = (-3)^2 + (y + 2)^2$$

$$\therefore 25 = 9 + (y + 2)^2$$

$$\therefore 16 = (y + 2)^2$$

$$\therefore y + 2 = \pm\sqrt{16}$$

$$\therefore y + 2 = \pm 4$$

$$\therefore y = 4 - 2 \text{ या } y = -4 - 2$$

$$\therefore y = 2 \text{ या } y = -6$$

$$\therefore y \text{ का मान } 2 \text{ या } -6 \text{ है।}$$



प्रश्नसंग्रह 5.1



1. निम्नलिखित प्रत्येक युग्म के बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

(1) A $(2, 3)$, B $(4, 1)$ (2) P $(-5, 7)$, Q $(-1, 3)$ (3) R $(0, -3)$, S $(0, \frac{5}{2})$

(4) L $(5, -8)$, M $(-7, -3)$ (5) T $(-3, 6)$, R $(9, -10)$ (6) W $(\frac{-7}{2}, 4)$, X $(11, 4)$

2. नीचे दिए गए बिंदु एकरेखीय हैं या नहीं ? इसकी जाँच कीजिए।

(1) A $(1, -3)$, B $(2, -5)$, C $(-4, 7)$ (2) L $(-2, 3)$, M $(1, -3)$, N $(5, 4)$

(3) R $(0, 3)$, D $(2, 1)$, S $(3, -1)$ (4) P $(-2, 3)$, Q $(1, 2)$, R $(4, 1)$

3. X- अक्ष पर स्थित वह बिंदु ज्ञात कीजिए जो बिंदु A $(-3, 4)$ और B $(1, -4)$ से समान दूरी पर हो।

4. जाँच कीजिए कि बिंदु P $(-2, 2)$, Q $(2, 2)$ और R $(2, 7)$ समकोण त्रिभुज के शीर्ष बिंदु हैं।

5. सिद्ध कीजिए कि, $P(2, -2)$, $Q(7, 3)$, $R(11, -1)$ और $S(6, -6)$ शीर्ष बिंदुवाला चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज है।
6. सिद्ध कीजिए कि, $A(-4, -7)$, $B(-1, 2)$, $C(8, 5)$ और $D(5, -4)$ समचतुर्भुज ABCD के शीर्ष बिंदु हैं।
7. यदि बिंदु $L(x, 7)$ और $M(1, 15)$ के बीच की दूरी 10 हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।
8. सिद्ध कीजिए कि, $A(1, 2)$, $B(1, 6)$, $C(1 + 2\sqrt{3}, 4)$ समबाहु त्रिभुज के शीर्ष बिंदु हैं।



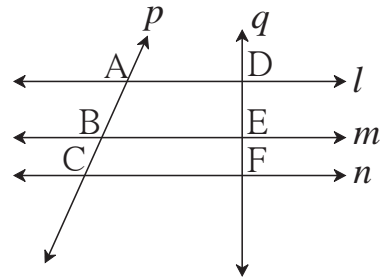
थोड़ा याद करें

तीन समांतर रेखाओं के अंतःखंडों का गुणधर्म :

आकृति में रेखा $l \parallel$ रेखा $m \parallel$ रेखा n ,

रेखा p तथा रेखा q तिर्यक रेखाएँ हैं।

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$



आकृति 5.11



आओ जानें

रेखाखंडों का विभाजन (Division of a line segment)



आकृति 5.12

आकृति में, $AP = 6$ और $PB = 10$

$$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

इसे भिन्न शब्दों में 'बिंदु P रेखाखंड AB को 3:5 के अनुपात में विभाजित करता है।', ऐसा कहते हैं।

जब किसी रेखाखंड पर स्थित बिंदु रेखाखंड को दिए गए अनुपात में विभाजित करता है तब उस विभाजक बिंदु के निर्देशांक कैसे प्राप्त करेंगे यह देखते हैं।

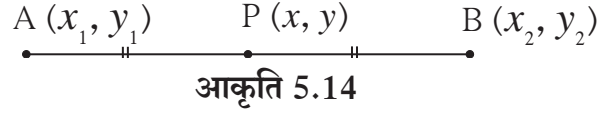
रेखाखंड के मध्यबिंदु का सूत्र (Mid-point formula)

$A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ ये दो बिंदु हैं, और यदि बिंदु $P(x, y)$ रेखा AB का मध्य बिंदु हो तो

$$m = n$$

अब विभाजन सूत्रानुसार,

x और y का मान लिखेंगे।



$$\begin{aligned} x &= \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} \\ &= \frac{mx_2 + mx_1}{m+m} \quad \because m = n \\ &= \frac{m(x_1 + x_2)}{2m} \\ &= \frac{x_1 + x_2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \\ &= \frac{my_2 + my_1}{m+m} \quad \because m = n \\ &= \frac{m(y_1 + y_2)}{2m} \\ &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}$$

\therefore मध्य बिंदु P के निर्देशांक $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ हैं। इसे ही रेखाखंड के मध्यबिंदु का सूत्र कहते हैं।

हमने पिछली कक्षा में दो परिमेय संख्याएँ a और b को संख्या रेखा पर दर्शाकर, उनको जोड़ने वाले रेखाखंड का मध्य बिंदु $\frac{a+b}{2}$ होता है यह दिखाया था। यह निष्कर्ष अभी प्राप्त सूत्र का एक विशेष प्रकार है, इसे ध्यान में रखिए।

हल किए गए उदाहरण

उदा.(1) यदि बिंदु $A(3,5)$ और बिंदु $B(7,9)$ है और बिंदु Q यह रेखाखंड AB को 2:3 अनुपात में विभाजित करता हो, तो बिंदु Q के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए उदाहरण में, माना $(x_1, y_1) = (3, 5)$

और $(x_2, y_2) = (7, 9)$

उसी प्रकार, $m : n = 2:3$

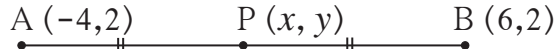
रेखाखंड के विभाजन सूत्रानुसार,

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{2 \times 7 + 3 \times 3}{2+3} = \frac{23}{5} \quad y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{2 \times 9 + 3 \times 5}{2+3} = \frac{33}{5}$$

\therefore बिंदु Q के निर्देशांक $\left(\frac{23}{5}, \frac{33}{5}\right)$

उदा.(2) $A(-4,2)$, $B(6,2)$ इस रेखाखंड का मध्य बिंदु P हो, तो P बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

हल :



आकृति 5.15

$(-4, 2) = (x_1, y_1)$; $(6, 2) = (x_2, y_2)$ और बिंदु P के निर्देशांक (x, y)

∴ मध्य बिंदु के सूत्रानुसार,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4 + 6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2 + 2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

∴ मध्य बिंदु P के निर्देशांक $(1,2)$ प्राप्त होंगे ।



थोड़ा याद करें

हम जानते हैं कि त्रिभुज की माध्यिकाएँ संगामी होती हैं ।
संगामी बिंदु (centroid) माध्यिका को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है ।

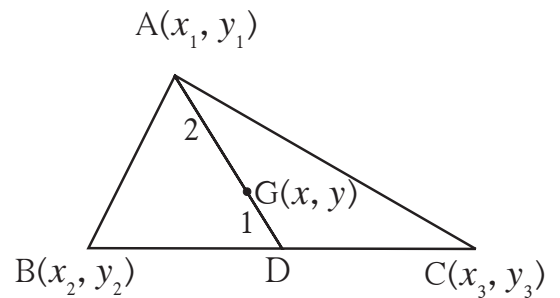


आओ जानें

केंद्रव बिंदु का सूत्र (माध्यिका संगामी बिंदु का सूत्र) (Centroid formula)

त्रिभुज के तीनों शीर्ष बिंदुओं के निर्देशांक दिए गए हों तो विभाजन सूत्र का उपयोग करके केंद्रव बिंदु के निर्देशांक कैसे प्राप्त कर सकते हैं । यह हम देखेंगे ।

माना, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$
 ΔABC के शीर्ष बिंदु हैं । रेखा AD ΔABC की
माध्यिका है । बिंदु $G(x, y)$ त्रिभुज का केंद्रव है ।
बिंदु D रेखा BC का मध्य बिंदु है ।



आकृति 5.16

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) बिंदु A(-7,4) और बिंदु B(-6,-5) है। बिंदु T यह रेखाखंड AB को 7:2 के अनुपात में विभाजित करता है, तो बिंदु T के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : माना, T का निर्देशांक (x, y) है।

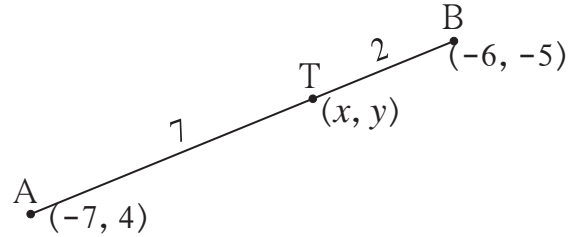
∴ रेखाखंड के विभाजन सूत्रानुसार,

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{7 \times (-6) + 2 \times (-7)}{7+2}$$

$$= \frac{-42 - 14}{9} = \frac{-56}{9}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{7 \times (-5) + 2 \times (4)}{7+2}$$

$$= \frac{-35 + 8}{9} = \frac{-27}{9} = -3$$



आकृति 5.17

∴ बिंदु T का निर्देशांक $\left(\frac{-56}{9}, -3\right)$ प्राप्त होगा।

उदा. (2) बिंदु P(-4, 6) यह बिंदु A(-6, 10) और बिंदु B(r, s) को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है, तो बिंदु B के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : रेखाखंड के विभाजन सूत्रानुसार

$$-4 = \frac{2 \times r + 1 \times (-6)}{2 + 1}$$

$$\therefore -4 = \frac{2r - 6}{3}$$

$$\therefore -12 = 2r - 6$$

$$\therefore 2r = -6$$

$$\therefore r = -3$$

$$6 = \frac{2 \times s + 1 \times 10}{2 + 1}$$

$$\therefore 6 = \frac{2s + 10}{3}$$

$$\therefore 18 = 2s + 10$$

$$\therefore 2s = 8$$

$$\therefore s = 4$$

∴ बिंदु B के निर्देशांक (-3, 4) है।

उदा. (3) बिंदु A(15,5), B(9,20) और P(11,15) इस प्रकार हैं कि A-P-B तो ज्ञात कीजिए कि बिंदु P रेखाखंड AB को किस अनुपात में विभाजित करता है।

हल : बिंदु P(11,15) रेखाखंड AB को m : n के अनुपात में विभाजित करता है।

∴ विभाजन सूत्रानुसार,

अधिक जानकारी हेतू :

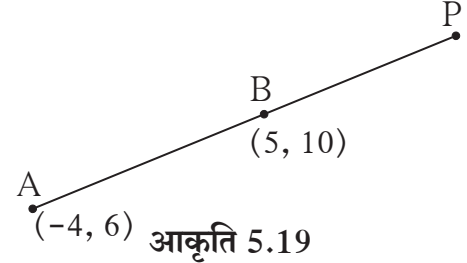
बिंदु A और B को जोड़ने वाले रेखाखंड का बाह्य विभाजन कैसे करते हैं ?

A(-4, 6), B(5, 10) ऐसे बिंदु हों तो रेखाखंड AB को 3:1 के अनुपात में बाह्य विभाजित करने वाले बिंदु P के निर्देशांक कैसे प्राप्त करेंगे ? आइए देखें ।

$$\frac{AP}{BP} = \frac{3}{1} \text{ अर्थात AP, PB से बड़ा है और A-B-P}$$

$$\frac{AP}{BP} = \frac{3}{1} \text{ अर्थात AP} = 3k, \text{ BP} = k, \text{ तो AB} = 2k$$

$$\therefore \frac{AB}{BP} = \frac{2}{1}$$



अब बिंदु B रेखाखंड AP को 2 : 1 इस अनुपात में विभाजित करता है ।

बिंदु A और बिंदु B के निर्देशांक दिए होने पर हमने बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात करना सीखा है ।

प्रश्नसंग्रह 5.2

- यदि बिंदु P बिंदुओं A(-1, 7) और B(4, -3) को जोड़ने वाले रेखाखंड को 2 : 3 अनुपात में विभाजित करता हो तो बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।
- नीचे दिए गए प्रत्येक उदाहरण में रेखाखंड PQ को a : b के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।
 - P(-3, 7), Q(1, -4), a : b = 2 : 1
 - P(-2, -5), Q(4, 3), a : b = 3 : 4
 - P(2, 6), Q(-4, 1), a : b = 1 : 2
- यदि P-T-Q है, तो बिंदु T(-1, 6), बिंदु P(-3, 10) और बिंदु Q(6, -8) को जोड़ने वाले रेखाखंड को किस अनुपात में विभाजित करता है, ज्ञात कीजिए ।
- रेखाखंड AB यह वृत्त का व्यास है, जिसका केंद्र बिंदु P है । A(2, -3) और P(-2, 0) हो तो बिंदु B के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
- बिंदु A(8, 9) और B(1, 2) को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को बिंदु P(k, 7) किस अनुपात में विभाजित करता है ज्ञात कीजिए और k का मान बताइए ।
- (22, 20) और (0, 16) को जोड़ने वाले रेखाखंड के मध्यबिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।
- नीचे त्रिभुज के शीर्ष बिंदु दिए हैं । प्रत्येक त्रिभुज के केंद्र का निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।
 - (-7, 6), (2, -2), (8, 5)
 - (3, -5), (4, 3), (11, -4)
 - (4, 7), (8, 4), (7, 11)

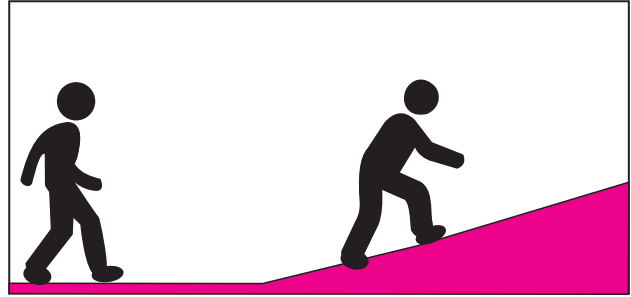
8. ΔABC में बिंदु G केंद्र है, बिंदु A, B तथा G के निर्देशांक क्रमशः $(-14, -19), (3, 5)$ और $(-4, -7)$ हैं, तो बिंदु C के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
9. $G(1, 5)$ केंद्र वाले त्रिभुज के $A(h, -6), B(2, 3)$ और $C(-6, k)$ शीर्ष बिंदु हों तो h और k के मान ज्ञात कीजिए।
10. बिंदु $A(2, 7)$ और $B(-4, -8)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड AB के त्रिभाजक बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
11. $A(-14, -10), B(6, -2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को चार सर्वांगसम रेखाखंडों में विभाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
12. $A(20, 10), B(0, 20)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को पांच सर्वांगसम रेखाखंडों में विभाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।



आओ जानें

रेखा का ढाल (Slope of a line)

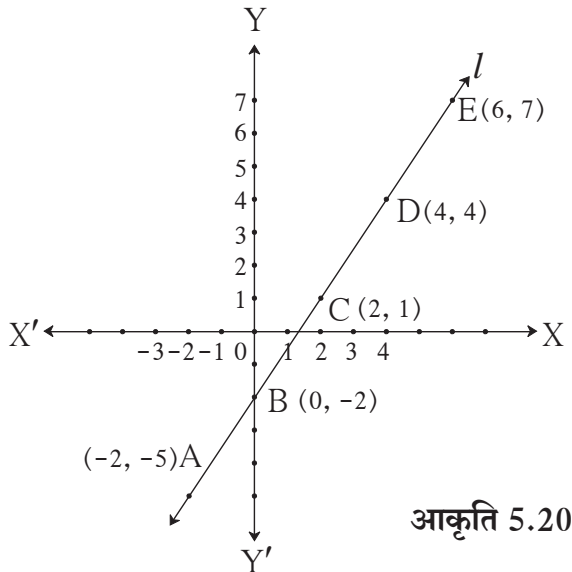
समतल जमीन पर चलते समय हमें परिश्रम नहीं करना पड़ता है। ऊँचाई (ढलान) पर चढ़ते समय थोड़ा परिश्रम करना पड़ता है। मनुष्य की साँस फूल सकती है। हमने विज्ञान में अध्ययन किया है कि ऊँचाई (ढलान) वाले रास्ते पर चढ़ते समय गुरुत्वाकर्षण बल के विरुद्ध काम करना पड़ता है।



प्रतलीय निर्देशांक भूमिति में रेखा का ढाल एक महत्वपूर्ण संकल्पना है। नीचे दी गई कृति से इस संकल्पना को समझेंगे।

कृति I :

संलग्न आकृति में $A(-2, -5), B(0, -2), C(2, 1), D(4, 4), E(6, 7)$ यह बिंदु रेखा l पर स्थित है। इन निर्देशांकों का उपयोग कर के नीचे दी गई सारिणी का अवलोकन कीजिए।



आकृति 5.20

$$\therefore \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \dots\dots\dots (I)$$

रेखा TQ यह X- अक्ष के साथ θ कोण बनाती है।

$$\therefore \frac{QR}{PR} = \tan\theta \dots\dots\dots (II)$$

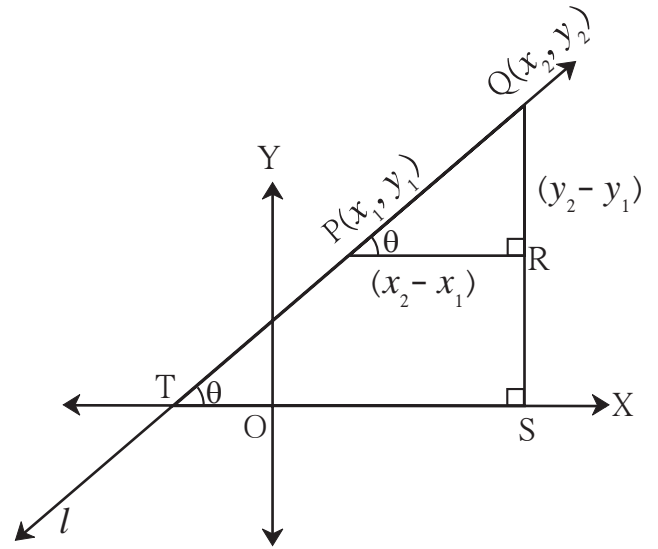
$$\therefore (I) \text{ तथा } (II) \text{ से, } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$$

$$\therefore m = \tan\theta$$

अब रेखा PR \parallel रेखा TS और रेखा l उसकी तिर्यक रेखा है।

$$\therefore \angle QPR = \angle QTS \dots\dots\dots \text{संगत कोण}$$

इस प्रकार, रेखा द्वारा X-अक्ष के धन दिशा में बनाए गए कोण का टॅन (tan) अनुपात ही उस रेखा का ढाल होता है। इस प्रकार भी ढाल की परिभाषा कर सकते हैं।



आकृति 5.23

दो रेखाओं का ढाल जब समान होता है तब वे रेखाएँ X- अक्ष की धन दिशा में समान माप के कोण बनाती हैं।
 \therefore वे दोनों रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।

समांतर रेखाओं का ढाल (Slope of parallel lines)

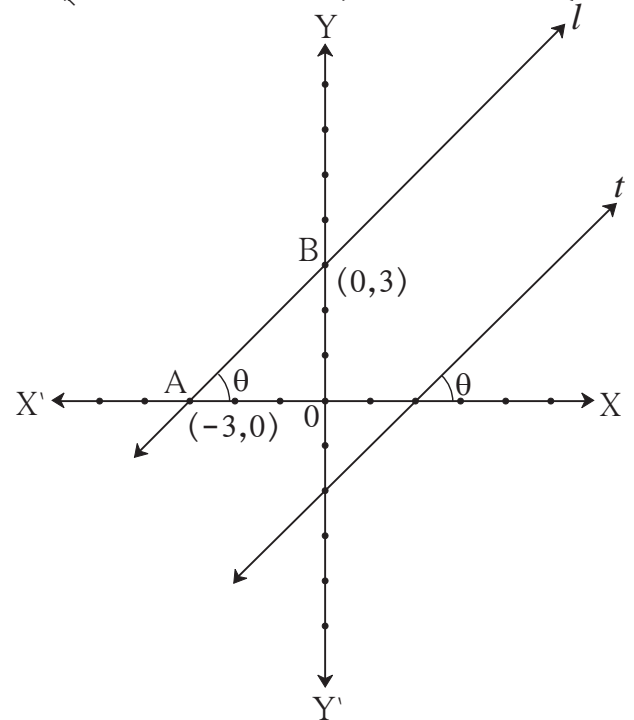
कृति : आकृति 5.24 में रेखा l और रेखा t इन दोनों ही रेखाओं द्वारा X- अक्ष के धन दिशा में बना कोण θ है।

\therefore रेखा l \parallel रेखा t $\dots\dots\dots$ संगत कोण कसौटी
 रेखा l पर बिंदु A(-3, 0) और बिंदु B(0, 3)
 का विचार कीजिए और रेखा AB का ढाल ज्ञात
 कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{रेखा AB का ढाल} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{\boxed{} - \boxed{}}{\boxed{} - \boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \\ &= \boxed{} \end{aligned}$$

उसी प्रकार t पर अपनी सुविधानुसार बिंदु लेकर उसका ढाल ज्ञात कीजिए।

इस प्रकार समांतर रेखाओं के ढाल समान होते हैं इसकी जाँच आप कर सकते हैं।



आकृति 5.24

यहाँ पर $\theta = 45^\circ$ है।

ढाल, $m = \tan\theta$ का उपयोग कर समांतर रेखाओं के ढाल समान होते हैं इसकी जाँच करके देखिए।

उसी प्रकार $\theta = 30^\circ$, $\theta = 60^\circ$ मान लेकर समांतर रेखाओं के ढाल समान होते हैं इसकी जाँच कीजिए।



इसे ध्यान में रखें

X- अक्ष या X- अक्ष के समांतर रेखाओं का ढाल शून्य होता है।

Y- अक्ष या Y- अक्ष के समांतर रेखाओं का ढाल बताया नहीं जा सकता।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) बिंदु A (-3, 5) और बिंदु B (4, -1) से जाने वाली रेखा का ढाल ज्ञात कीजिए।

हल : माना $x_1 = -3$, $x_2 = 4$, $y_1 = 5$, $y_2 = -1$

$$\therefore \text{रेखा AB का ढाल} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 5}{4 - (-3)} = \frac{-6}{7}$$

उदा. (2) सिद्ध कीजिए कि बिंदु P(-2, 3), बिंदु Q(1, 2) बिंदु R(4, 1) यह एक रेखीय बिंदु हैं।

हल : P(-2, 3), Q(1, 2) और R(4, 1) ये दिए हुए बिंदु हैं।

$$\text{रेखा PQ का ढाल} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 3}{1 - (-2)} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{रेखा QR का ढाल} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 2}{4 - 1} = -\frac{1}{3}$$

रेखा PQ और रेखा QR का ढाल समान है।

परंतु बिंदु Q यह दोनों ही रेखाओं पर है।

\therefore बिंदु P, Q, R यह एकरेखीय बिंदु हैं।

उदा. (3) यदि बिंदु P(k, 0) और बिंदु Q(-3, -2), इन दोनों बिंदुओं को जोड़ने वाली रेखा का ढाल $\frac{2}{7}$ है तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल : P(k, 0) और Q(-3, -2)

$$\text{रेखा PQ का ढाल} = \frac{-2 - 0}{-3 - k} = \frac{-2}{-3 - k}$$

रेखा PQ का ढाल $\frac{2}{7}$ दिया है।

$$\therefore \frac{-2}{-3 - k} = \frac{2}{7} \quad \therefore k = 4$$

उदा. (4) बिंदु A (6, 1), बिंदु B (8, 2), बिंदु C (9, 4) और बिंदु D (7, 3) यह □ ABCD के शीर्ष बिंदु हों तो सिद्ध कीजिए कि □ ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

हल : आपको पता है कि, रेखा का ढाल = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\text{रेखा AB का ढाल} = \frac{2-1}{8-6} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots (I)$$

$$\text{रेखा BC का ढाल} = \frac{4-2}{9-8} = 2 \dots\dots\dots (II)$$

$$\text{रेखा CD का ढाल} = \frac{3-4}{7-9} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots (III)$$

$$\text{रेखा DA का ढाल} = \frac{3-1}{7-6} = 2 \dots\dots\dots (IV)$$

रेखा AB का ढाल = रेखा CD का ढाल (I) तथा (III) से

∴ रेखा AB || रेखा CD

रेखा BC का ढाल = रेखा DA का ढाल (II) तथा (IV) से

∴ रेखा BC || रेखा DA

अर्थात् चतुर्भुज के दोनों सम्मुख भुजाओं के युग्म परस्पर समांतर है।

∴ □ ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

प्रश्नसंग्रह 5.3

1. किसी रेखा द्वारा X-अक्ष की धन दिशा की ओर निर्मित कोण का माप दिया गया है, इस आधार पर उन रेखाओं का ढाल ज्ञात कीजिए।
 (1) 45° (2) 60° (3) 90°
2. नीचे दिए गए बिंदुओं से होकर जाने वाली रेखा का ढाल ज्ञात कीजिए।
 (1) A (2, 3) और B (4, 7) (2) P (-3, 1) और Q (5, -2)
 (3) C (5, -2) और D (7, 3) (4) L (-2, -3) और M (-6, -8)
 (5) E(-4, -2) और F (6, 3) (6) T (0, -3) और S (0, 4)
3. निम्नलिखित बिंदु एक रेखीय हैं या नहीं ? जाँच कीजिए।
 (1) A(-1, -1), B(0, 1), C(1, 3) (2) D(-2, -3), E(1, 0), F(2, 1)
 (3) L(2, 5), M(3, 3), N(5, 1) (4) P(2, -5), Q(1, -3), R(-2, 3)
 (5) R(1, -4), S(-2, 2), T(-3, 4) (6) A(-4, 4), K(-2, $\frac{5}{2}$), N(4, -2)
4. बिंदु A (1, -1), बिंदु B (0, 4), बिंदु C (-5, 3) ये त्रिभुज के शीर्षबिंदु हैं तो त्रिभुज की प्रत्येक भुजा का ढाल ज्ञात कीजिए।
5. सिद्ध कीजिए कि, बिंदु A (-4, -7), बिंदु B (-1, 2), बिंदु C (8, 5) और D (5, -4) यह समांतर चतुर्भुज ABCD के शीर्ष बिंदु हैं।

6. R(1, -1) और S (-2, k) है। यदि इस रेखा RS का ढाल -2 हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।
7. B(k, -5) और C (1, 2) है। यदि इस रेखा का ढाल 7 हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।
8. बिंदु P(2, 4), Q (3, 6), R(3, 1) और S(5, k) है और रेखा PQ और रेखा RS परस्पर समांतर हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

1. उचित पर्याय चुनकर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।
 - (1) रेखा AB, यह Y-अक्ष के समांतर है यदि बिंदु A के निर्देशांक (1,3) हो तो, B बिंदु के निर्देशांक होंगे।
 (A)(3,1) (B)(5,3) (C)(3,0) (D)(1,-3)
 - (2) निम्नलिखित में से बिंदु X- अक्ष पर धन दिशा की ओर है।
 (A)(-2,0) (B)(0,2) (C)(2,3) (D)(2,0)
 - (3) (-3,4) इस बिंदु की आरंभ बिंदु से दूरी है।
 (A)7 (B) 1 (C) 5 (D)-5
 - (4) एक रेखा द्वारा X- अक्ष की धन दिशा से 30° का कोण बनता है, इसलिए उस रेखा का ढाल है।
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{3}$
2. निम्नलिखित बिंदु एक रेखीय हैं या नहीं ? निश्चित कीजिए।
 - (1) A (0,2) , B (1,-0.5), C (2,-3)
 - (2) P (1, 2) , Q (2, $\frac{8}{5}$) , R (3, $\frac{6}{5}$)
 - (3) L (1,2) , M (5,3) , N (8,6)
3. P (0,6) और Q (12,20) इन बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड के मध्य बिंदु का निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
4. A (3,8) और B (-9,3) इन बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड को Y- अक्ष किस अनुपात में विभाजित करता है।
5. X-अक्ष पर एक ऐसा बिंदु प्राप्त कीजिए जो P(2,-5) और Q(-2,9) से समान दूरी पर हो।
6. निम्नलिखित बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।
 - (1) A (a, 0), B (0, a) (2) P (-6, -3), Q (-1, 9) (3) R (-3a, a), S (a, -2a)
7. किसी त्रिभुज के शीर्ष बिंदु A (-3,1), B (0,-2) और C (1,3) हों तो इस त्रिभुज के परिकेंद्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

8. निम्नलिखित बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड त्रिभुज बना सकते हैं क्या ? यदि त्रिभुज बनता हो तो भुजाओं के आधार पर त्रिभुज का प्रकार लिखिए ।
- (1) L (6,4) , M (-5,-3) , N (-6,8)
- (2) P (-2,-6) , Q (-4,-2), R (-5,0)
- (3) A ($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$), B ($-\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$), C ($-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$)
9. यदि बिंदुओं P (-12,-3) और Q (4, k) से जानेवाली रेखा का ढाल $\frac{1}{2}$ हो तो k का मान ज्ञात कीजिए ।
10. सिद्ध कीजिए कि, बिंदुओं A(4, 8) और B(5, 5) को जोड़ने वाली रेखा बिंदुओं C(2,4) और D(1,7) को जोड़ने वाली रेखा के समांतर है ।
11. सिद्ध कीजिए कि, बिंदु P(1,-2), Q(5,2), R(3,-1) और S(-1,-5) समांतर चतुर्भुज के शीर्ष बिंदु हैं ।
12. यदि बिंदु P(2,1), Q(-1,3), R(-5,-3) और S(-2,-5) हो तो सिद्ध कीजिए कि □ PQRS एक आयत है ।
13. A (-1, 1), B (5, -3) और C (3, 5) इन शीर्ष बिंदु वाले त्रिभुज की माध्यिकाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए ।
- 14*. यदि D (-7, 6), E (8, 5) और F (2, -2) त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिंदु हों तो उस त्रिभुज के केंद्र बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।
15. सिद्ध कीजिए, कि A(4, -1), B(6, 0), C(7, -2) और D(5, -3) वर्ग के शीर्ष बिंदु हैं ।
16. शीर्ष बिंदु A(7, 1), B(3, 5) और C(2, 0) वाले त्रिभुज के परिवृत्त के केंद्र (परिकेंद्र) के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।
17. यदि बिंदु A(4,-3) और B(8,5) हो तो रेखाखंड AB को 3:1 के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।
- 18*. बिंदुओं A(-4, -2), B(-3, -7) C(3, -2) और D(2, 3) को क्रम से जोड़ने पर बनने वाले □ ABCD का प्रकार लिखिए ।
- 19*. बिंदु P, Q, R और S के कारण रेखाखंड AB पाँच सर्वांगसम भागों में विभाजित होता है । यदि A-P-Q-R-S-B और Q(12, 14) तथा S(4, 18) हो तो A, P, R, B के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।
20. P (6,-6), Q (3,-7) और R (3,3) इन बिंदुओं से जाने वाले वृत्त के केंद्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।
- 21*. समांतर चतुर्भुज के तीन शीर्ष बिंदुओं के निर्देशांक A (5,6), B (1,-2) और C (3,-2) हों तो चौथे बिंदु के सभी निर्देशांकों की जितनी संभव हो उतनी जोड़ियाँ ज्ञात कीजिए ।
22. A (1,7), B (6,3) C (0,-3) और D (-3,3) शीर्ष बिंदुओं वाला एक चतुर्भुज है । इस चतुर्भुज के प्रत्येक विकर्ण का ढाल ज्ञात कीजिए ।



6

त्रिकोणमिति



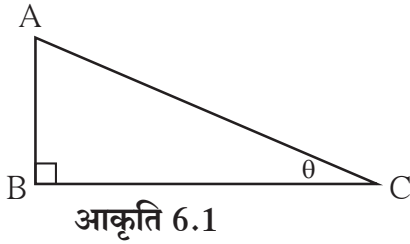
आओ सीखें

- त्रिकोणमितीय अनुपात
- त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ
- उन्नत कोण तथा अवनत कोण
- ऊँचाई तथा दूरी पर आधारित उदाहरण



थोड़ा याद करें

1. संलग्न आकृति के आधार पर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।



$$\sin \theta = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}, \cos \theta = \frac{\boxed{}}{\boxed{}},$$

$$\tan \theta = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

2. नीचे दिए गए अनुपातों के बीच का संबंध लिखिए।

(i) $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \boxed{}$

(ii) $\sin \theta = \cos (90 - \boxed{})$

(iii) $\cos \theta = \sin (90 - \boxed{})$

(iv) $\tan \theta \tan (90 - \theta) = \boxed{}$

3. नीचे दिया गया समीकरण पूर्ण कीजिए।

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \boxed{}$$

4. नीचे दिए गए त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान लिखिए।

(i) $\sin 30^\circ = \frac{1}{\boxed{}}$

(ii) $\cos 30^\circ = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$

(iii) $\tan 30^\circ = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$

(iv) $\sin 60^\circ = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$

(v) $\cos 45^\circ = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$

(vi) $\tan 45^\circ = \boxed{}$

हमने नौवीं कक्षा में न्यूनकोण के कुछ त्रिकोणमितीय अनुपातों का अध्ययन किया है। इस वर्ष न्यून कोण के ही कुछ और त्रिकोणमितीय अनुपातों का अध्ययन करेंगे।



आओ जानें

कोसेक, सेक और कॉट अनुपात (cosec, sec and cot ratios)

कोण के साईन अनुपात के व्युत्क्रम अनुपात को कोसिकेंट (cosecant) अनुपात कहते हैं।

संक्षेप में इसे cosec लिखा जाता है। $\therefore \text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

इसी प्रकार कोसाइन और टॅजेंट अनुपातों के व्युत्क्रम अनुपात को क्रमशः सिकेंट (secant) और कोटॅजेंट (cotangent) अनुपात कहते हैं और इसे संक्षेप में क्रमशः sec और cot लिखते हैं।

$$\therefore \text{sec}\theta = \frac{1}{\cos\theta} \text{ और } \text{cot}\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

आकृति 6.2 में,

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{AB}{AC}}$$

$$= \frac{AC}{AB}$$

$$\text{अर्थात्, cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{सम्मुख भुजा}}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\therefore \text{cot}\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{AB}{BC}}$$

$$\text{cot}\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{संलग्न भुजा}}{\text{सम्मुख भुजा}}$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{sec}\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{BC}{AC}}$$

$$= \frac{AC}{BC}$$

$$\text{अर्थात्, sec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{संलग्न भुजा}}$$

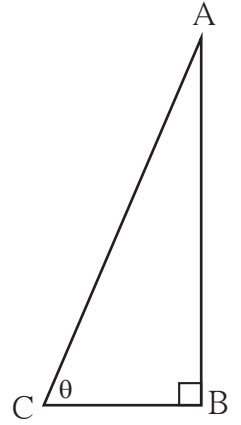
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \text{ यह आप जानते हैं।}$$

$$\therefore \text{cot}\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\therefore \text{cot}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$



आकृति 6.2



इसे ध्यान में रखें

त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर संबंध

cosec, sec और cot इन अनुपातों की परिभाषा से,

- $\frac{1}{\sin \theta} = \text{cosec } \theta \quad \therefore \sin \theta \times \text{cosec } \theta = 1$
- $\frac{1}{\cos \theta} = \text{sec } \theta \quad \therefore \cos \theta \times \text{sec } \theta = 1$
- $\frac{1}{\tan \theta} = \text{cot } \theta \quad \therefore \tan \theta \times \text{cot } \theta = 1$

अधिक जानकारी हेतू

महान भारतीय गणितज्ञ आर्यभट्ट का जन्म इ.स. 476 में कुसुमपुर नामक गाँव में हुआ था। यह गाँव बिहार में पटना शहर के पास है। उन्होंने अंकगणित, बीजगणित और भूमिति जैसी गणित की शाखाओं के लिए बहुत कार्य किया। उन्होंने 'आर्यभटीय' नामक ग्रंथ में अनेक गणितीय निष्कर्ष सूत्र के रूप में लिखकर रखे हैं। उदाहरणार्थ,

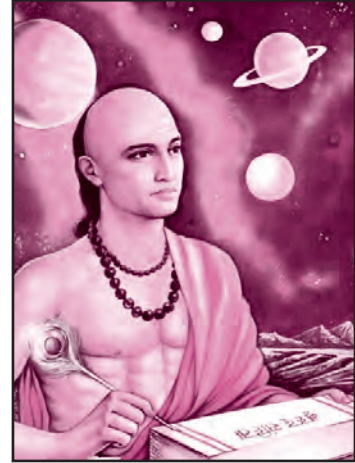
- (1) अंकगणितीय शृंखला का n वाँ पद ज्ञात करने का और प्रथम n पदों के योगफल का सूत्र
- (2) $\sqrt{2}$ का मान ज्ञात करने का सूत्र
- (3) π का मान 3.1416 चार दशमलव स्थान तक का सही मान

खगोलशास्त्र के अध्ययन में उन्होंने त्रिकोणमिति का उपयोग किया और **ज्या अनुपात (sine ratio)** की संकल्पना का उपयोग पहली बार किया।

उस समय के विश्व के गणितीय ज्ञान को ध्यान में रखें तो उनके कार्य श्रेष्ठ थे। इसलिए उनके ग्रंथ का प्रसार पूरे भारत में उसी प्रकार अरब देशों से होते हुए यूरोप तक हुआ।

सभी निरीक्षकों का विचार था कि पृथ्वी स्थिर है और सूर्य, चंद्र तथा तारे पृथ्वी की परिक्रमा करते हैं। परंतु आर्यभट्ट ने लिखा कि जिस प्रकार नाव से यात्रा करते समय तट के वृक्ष तथा वस्तुएँ विपरीत दिशा में जाती हुई प्रतीत होती हैं, उसी प्रकार पृथ्वी के लोगों को भी सूर्य, चंद्र, तारों इत्यादि की गति का आभास होता है। अर्थात् पृथ्वी भ्रमण करती है। तब यह मान्य हुआ कि पृथ्वी अपने चारों ओर घूमती है। इसी कारण आकाश में ग्रह, तारों के घूमने का आभास होता है।

19 अप्रैल 1975 को भारत ने अंतरिक्ष में अपना पहला उपग्रह अंतरिक्ष में प्रक्षेपित किया। इस उपग्रह को 'आर्यभट्ट' नाम देकर देश ने इस महान गणितज्ञ को गौरवान्वित किया।



★ $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ और 90° माप के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों की सारिणी।

त्रिकोणमितीय अनुपात	कोणों के माप (θ)				
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	निश्चित नहीं कर सकते
$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$	निश्चित नहीं कर सकते	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	निश्चित नहीं कर सकते
$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$	निश्चित नहीं कर सकते	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



आओ जानें

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ (Trigonometrical identities)

संलग्न आकृति 6.3 में समकोण ΔABC में, $\angle B = 90^\circ$

$$(i) \sin \theta = \frac{BC}{AC}$$

$$(ii) \cos \theta = \frac{AB}{AC}$$

$$(iii) \tan \theta = \frac{BC}{AB}$$

$$(iv) \operatorname{cosec} \theta = \frac{AC}{BC}$$

$$(v) \sec \theta = \frac{AC}{AB}$$

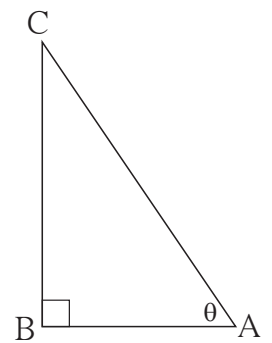
$$(vi) \cot \theta = \frac{AB}{BC}$$

इसी प्रकार, पायथागोरस के प्रमेयानुसार ,

$$BC^2 + AB^2 = AC^2 \dots \dots (I)$$

समीकरण (I) के दोनों पक्षों में AC^2 से भाग देने पर

$$\frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$



आकृति 6.3

$$\therefore \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2} = 1$$

$$\therefore \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = 1$$

$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ [(sinθ)² को sin²θ और (cosθ)² को cos²θ इस प्रकार लिखते हैं।]

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \dots\dots\dots (II)$$

अब समीकरण (II) के दोनों पक्षों में sin²θ से भाग देने पर

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta \dots\dots\dots (III)$$

उसी प्रकार, समीकरण (II) के दोनों पक्षों में cos²θ से भाग देने पर

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \dots\dots\dots (IV)$$

समीकरण (II), (III), तथा (IV) यह मूलभूत त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ हैं।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) यदि $\sin\theta = \frac{20}{29}$ हो तो $\cos\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : विधि I

हम जानते हैं कि

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\left(\frac{20}{29}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\frac{400}{841} + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{400}{841}$$

$$= \frac{441}{841}$$

दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर

$$\therefore \cos\theta = \frac{21}{29}$$

विधि II

$$\sin\theta = \frac{20}{29}$$

आकृति के अनुसार $\sin\theta = \frac{AB}{AC}$

$$\therefore AB = 20k \text{ तथा } AC = 29k$$

माना $BC = x$

पायथागोरस के प्रमेय से

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$(20k)^2 + x^2 = (29k)^2$$

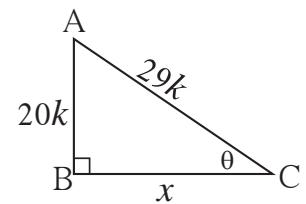
$$400k^2 + x^2 = 841k^2$$

$$x^2 = 841k^2 - 400k^2$$

$$= 441k^2$$

$$\therefore x = 21k$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{21k}{29k} = \frac{21}{29}$$



आकृति 6.4

उदा. (6) नीचे दिए गए समीकरणों में θ का निरसन कीजिए ।

$$x = a \cot \theta - b \operatorname{cosec} \theta$$

$$y = a \cot \theta + b \operatorname{cosec} \theta$$

हल : $x = a \cot \theta - b \operatorname{cosec} \theta$ (I)

$$y = a \cot \theta + b \operatorname{cosec} \theta$$
 (II)

समीकरण (I) तथा (II) को जोड़नेपर

$$x + y = 2a \cot \theta$$

$$\therefore \cot \theta = \frac{x + y}{2a}$$
 (III)

समीकरण (II) में से (I) को घटानेपर,

$$y - x = 2b \operatorname{cosec} \theta$$

$$\therefore \operatorname{cosec} \theta = \frac{y - x}{2b}$$
 (IV)

$$\text{अब, } \operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

$$\therefore \left(\frac{y - x}{2b} \right)^2 - \left(\frac{y + x}{2a} \right)^2 = 1$$

$$\therefore \frac{(y - x)^2}{4b^2} - \frac{(y + x)^2}{4a^2} = 1$$

$$\text{अथवा } \left(\frac{y - x}{b} \right)^2 - \left(\frac{y + x}{a} \right)^2 = 4$$

प्रश्नसंग्रह 6.1

1. यदि $\sin \theta = \frac{7}{25}$ तो $\cos \theta$ तथा $\tan \theta$ का मान ज्ञात कीजिए ।
2. यदि $\tan \theta = \frac{3}{4}$ तो $\sec \theta$ तथा $\cos \theta$ का मान ज्ञात कीजिए ।
3. यदि $\cot \theta = \frac{40}{9}$ तो $\operatorname{cosec} \theta$ तथा $\sin \theta$ का मान ज्ञात कीजिए ।
4. यदि $5 \sec \theta - 12 \operatorname{cosec} \theta = 0$ हो तो $\sec \theta$, $\cos \theta$ तथा $\sin \theta$ का मान ज्ञात कीजिए ।
5. यदि $\tan \theta = 1$ तो $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sec \theta + \operatorname{cosec} \theta}$ का मान ज्ञात कीजिए ।
6. सिद्ध कीजिए ।
 - (1) $\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + \cos \theta = \sec \theta$
 - (2) $\cos^2 \theta (1 + \tan^2 \theta) = 1$

$$(3) \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$$

$$(4) (\sec\theta - \cos\theta)(\cot\theta + \tan\theta) = \tan\theta \sec\theta$$

$$(5) \cot\theta + \tan\theta = \operatorname{cosec}\theta \sec\theta$$

$$(6) \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta} = \sec\theta + \tan\theta$$

$$(7) \sin^4\theta - \cos^4\theta = 1 - 2\cos^2\theta$$

$$(8) \sec\theta + \tan\theta = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

$$(9) \text{ यदि } \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = 2 \text{ तो सिद्ध कीजिए कि } \tan^2\theta + \frac{1}{\tan^2\theta} = 2$$

$$(10) \frac{\tan A}{(1+\tan^2 A)^2} + \frac{\cot A}{(1+\cot^2 A)^2} = \sin A \cos A$$

$$(11) \sec^4 A (1 - \sin^4 A) - 2\tan^2 A = 1$$

$$(12) \frac{\tan\theta}{\sec\theta - 1} = \frac{\tan\theta + \sec\theta + 1}{\tan\theta + \sec\theta - 1}$$

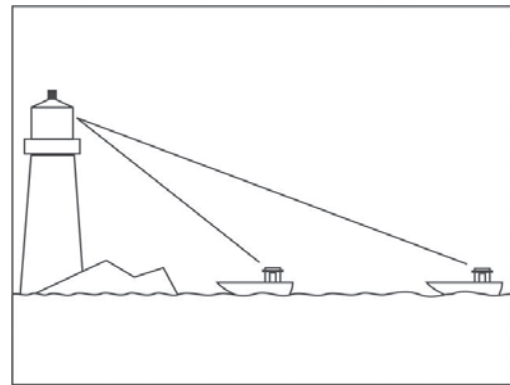


आओ जानें

त्रिकोणमिति का उपयोजन (Application of trigonometry)

कई बार हमें मीनार की, इमारत की या पेड़ की ऊँचाई उसी प्रकार जहाज की दीपस्तंभ से दूरी अथवा नदी के पाट की चौड़ाई इत्यादि ज्ञात करनी होती है। इन दूरियों का हम प्रत्यक्ष रूप से मापन नहीं कर सकते। किंतु त्रिकोणमितीय अनुपातों की सहायता से ऊँचाई तथा दूरी निश्चित कर सकते हैं।

ऊँचाई तथा दूरी निश्चित करने के लिए सर्वप्रथम दी गई जानकारी को दर्शाने वाली कच्ची आकृति (चित्र) तैयार करेंगे। वृक्ष (पेड़), पर्वत, मीनार आदि वस्तुएँ



आकृति 6.6

जमीन पर लंबवत हैं, इसे दर्शाने के लिए हम आकृति में लंब रेखाखंड का उपयोग करेंगे। हम निरीक्षक की ऊँचाई का विचार नहीं करेंगे। सामान्यतः हम मानते हैं कि निरीक्षक की दृष्टि क्षैतिज समांतर है।

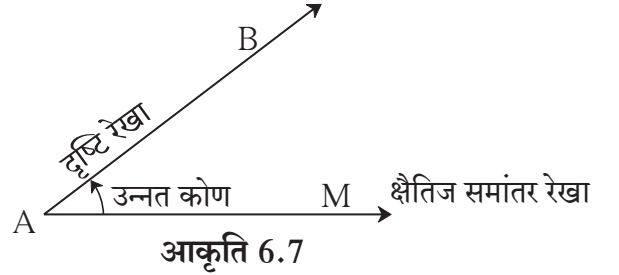
सर्व प्रथम हम कुछ संबंधित संकल्पनाओं का अध्ययन करेंगे ।

(i) दृष्टि रेखा (Line of vision) :

बिंदु 'A' पर खड़ा निरीक्षक बिंदु 'B' की ओर देखता है तब रेखा AB को दृष्टि रेखा कहते हैं ।

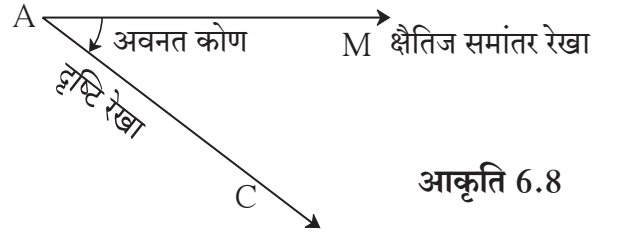
(ii) उन्नत कोण (Angle of elevation) :

रेखा AM निरीक्षक की सामान्य दृष्टि रेखा है, जो क्षितिज के समांतर है। निरीक्षण किया जाने वाला बिंदु B, A से अधिक ऊँचाई पर है, तब रेखा AB यह दृष्टि रेखा, रेखा AM से जो कोण बनाती है उसे उन्नत कोण कहते हैं । आकृति में $\angle MAB$ उन्नत कोण है ।



(iii) अवनत कोण (Angle of depression) :

यदि निरीक्षण किया जाने वाला बिंदु C क्षैतिज समांतर रेखा AM के नीचे हो तब रेखा AC यह दृष्टि रेखा, रेखा AM से अवनत कोण बनाती है । आकृति में $\angle MAC$ यह अवनत कोण है ।



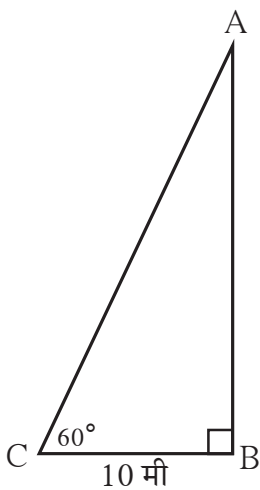
जब हम क्षैतिज समांतर रेखा की ऊपरी दिशा में देखते हैं तब बनने वाला कोण उन्नत कोण होता है ।

जब हम क्षैतिज समांतर रेखा के नीचे की दिशा में देखते हैं तब बनने वाला कोण अवनत कोण होता है ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) किसी पेड़ के तने से 10 मी की दूरी पर खड़ा निरीक्षक पेड़ की चोटी की ओर देखता है तब 60° माप का उन्नत कोण बनता है । उस पेड़ की ऊँचाई कितनी होगी ? ($\sqrt{3} = 1.73$)

हल : आकृति 6.9 में बिंदु C के पास निरीक्षक है और AB पेड़ है ।



आकृति 6.9

$AB = h =$ पेड़ की ऊँचाई

निरीक्षक की पेड़ से दूरी $BC = 10$ मी

और उन्नत कोण $(\theta) = \angle BCA = 60^\circ$

आकृति से, $\tan\theta = \frac{AB}{BC}$ (I)

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ (II)

$\therefore \frac{AB}{BC} = \sqrt{3}$ (I) तथा (II) से

$\therefore AB = BC\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

$\therefore AB = 10 \times 1.73 = 17.3$ मी

\therefore पेड़ की ऊँचाई 17.3 मी है ।

उदा. (2) 40 मी ऊँची इमारत की छत से उस इमारत से कुछ मीटर की दूरी पर खड़े स्कूटर की ओर देखने पर 30° माप का अवनत कोण बनता है तो वह स्कूटर इमारत से कितनी दूरी पर है ?

$$(\sqrt{3} = 1.73)$$

हल : आकृति 6.10 में रेख AB इमारत है। इमारत से 'x' मी की दूरी 'C' पर स्कूटर खड़ा है।

आकृति में A पर निरीक्षक खड़ा है।

AM यह क्षैतिज समांतर रेखा है।

$\angle MAC$ यह अवनत कोण है।

ध्यान दें कि $\angle MAC$ तथा $\angle ACB$

एकांतर कोण सर्वांगसम है।

$$\text{आकृति से, } \tan 30^\circ = \frac{AB}{BC}$$

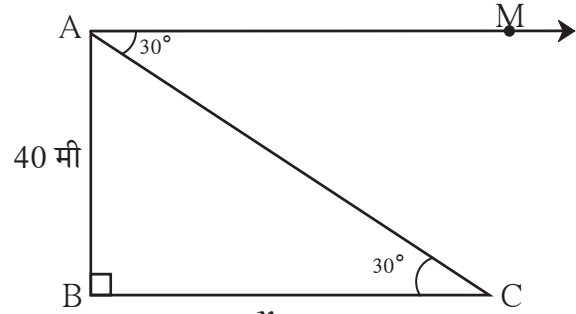
$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{40}{x}$$

$$\therefore x = 40\sqrt{3}$$

$$= 40 \times 1.73$$

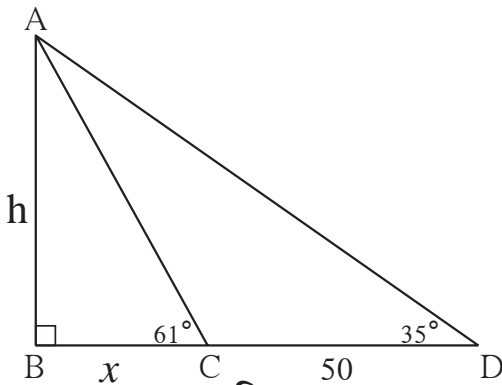
$$= 69.20 \text{ मी}$$

\therefore वह स्कूटर इमारत से 69.20 मी दूरी पर खड़ा है।



आकृति 6.10

उदा. (3) नदी के पाट की चौड़ाई ज्ञात करने के लिए एक व्यक्ति एक किनारे से दूसरे किनारे पर स्थित मीनार की चोटी को देखता है। उस समय 61° माप का उन्नत कोण बनता है। उसी रेखा में नदी के उसी किनारे से 50 मी की दूरी पर पीछे जाकर मीनार की ऊपरी चोटी को देखने पर 35° माप का उन्नत कोण बनता हो तो नदी की चौड़ाई और मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। ($\tan 61^\circ \approx 1.8$, $\tan 35^\circ \approx 0.7$)



आकृति 6.11

हल : रेख AB नदी के दूसरे किनारे की मीनार की ऊँचाई को दर्शाता है। 'A' मीनार की चोटी तथा रेख BC नदी की चौड़ाई दर्शाता है।

माना कि मीनार की ऊँचाई h मी तथा नदी की चौड़ाई x मी है।

$$\text{आकृति से } \tan 61^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\therefore 1.8 = \frac{h}{x}$$

$$h = 1.8 \times x$$

$10h = 18x$ (I)..... 10 से गुणा करनेपर
समकोण ΔABD में,

$$\tan 35^\circ = \frac{h}{x + 50}$$

$$0.7 = \frac{h}{x + 50}$$

$$\therefore h = 0.7(x + 50)$$

$$\therefore 10h = 7(x + 50) \text{ (II)}$$

[(I) तथा (II) से]

$$18x = 7(x + 50)$$

$$\therefore 18x = 7x + 350$$

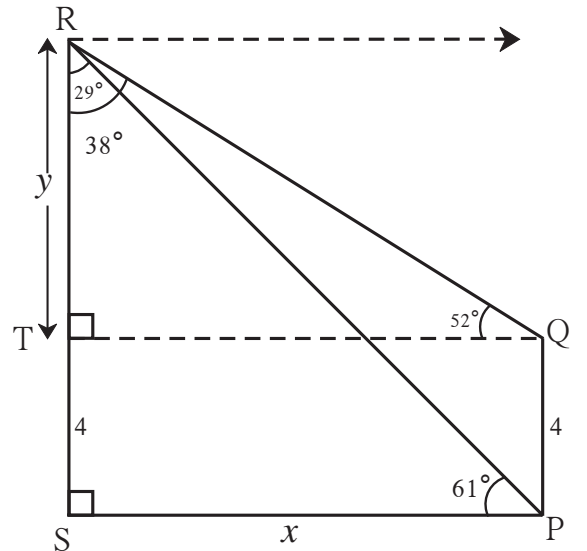
$$\therefore 11x = 350$$

$$\therefore x = \frac{350}{11} = 31.82$$

$$\text{अब, } h = 1.8x = 1.8 \times 31.82 \\ = 57.28 \text{ मी.}$$

\therefore नदी के पाट की चौड़ाई = 31.82 मी मीनार की ऊँचाई = 57.28 मी

उदा. (4) रोशनी घर के दरवाजे पर खड़ी थी। उसने घर से कुछ ही दूरी पर स्थित एक पेड़ की चोटी पर बैठे एक गरुड़ को देखा, तब उसकी दृष्टि से 61° माप का उन्नत कोण बना था। उसे ठीक से देखने के लिए वह घर की 4 मीटर ऊँची छत पर गई। यदि वहाँ से गरुड़ को देखते समय 52° मापवाला उन्नत कोण बना तो गरुड़ जमीन से कितनी ऊँचाई पर था ?
(उत्तर पासवाले पूर्णांक तक ज्ञात कीजिए।)



आकृति 6.12

$$(\tan 61^\circ = 1.80, \tan 52^\circ = 1.28, \tan 29^\circ = 0.55, \tan 38^\circ = 0.78)$$

समकोण Δ CDB में,

$$\tan 30^\circ = \frac{BC}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{10}$$

$$x = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

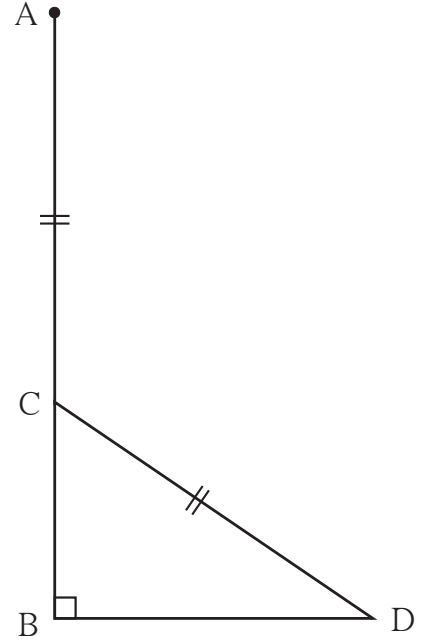
$$y = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = \frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = 10\sqrt{3}$$

पेड़ की ऊँचाई $10\sqrt{3}$ मी है।



आकृति 6.13

प्रश्नसंग्रह 6.2

1. कोई व्यक्ति किसी गिरिजाघर से 80 मीटर दूरी पर खड़ा है। उस व्यक्ति द्वारा गिरिजाघर की छत की ओर देखने पर 45° माप का उन्नत कोण बनता हो तो, गिरिजाघर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
2. दीपस्तंभ से किसी जहाज की ओर देखते समय 60° माप का अवनत कोण बनता है। यदि दीपस्तंभ की ऊँचाई 90 मीटर हो तो वह जहाज दीपस्तंभ से कितनी दूरी पर होगा? ($\sqrt{3} = 1.73$)
3. 12 मीटर चौड़ाई वाले रास्ते के दोनों ओर आमने-सामने दो इमारतें हैं। उनमें से एक की ऊँचाई 10 मीटर है। उसके छत से दूसरे इमारत की छत की ओर देखते समय 60° माप का उन्नत कोण बनता हो तो, दूसरी इमारत की ऊँचाई कितनी होगी ?
4. 18 मीटर तथा 7 मीटर ऊँचाई वाले दो खंभे जमीन पर खड़े हैं। उनके ऊपरी सिरों को जोड़ने वाले तार की लंबाई 22 मीटर हो तो उस तार द्वारा क्षैतिज समांतर सतह से बने कोण का माप ज्ञात कीजिए।
5. आँधी के कारण किसी पेड़ का सिरा टूटकर जमीन से 60° माप का कोण बनाता है। पेड़ का जमीन पर टिका हुआ सिरा तथा पेड़ के तने के बीच की दूरी 20 मीटर हो तो, पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
6. एक पतंग उड़ते समय जमीन से 60 मीटर की लंब ऊँचाई तक पहुँचती है। पतंग के धागे का एक सिरा जमीन पर बाँधने पर जमीन तथा धागे के बीच 60° माप का कोण बनता है। धागा एकदम सीधा होगा यह मानकर धागे की लंबाई ज्ञात कीजिए। ($\sqrt{3} = 1.73$)

1. नीचे दिए गए बहुवैकल्पिक प्रश्नों के उत्तर का सही विकल्प चुनकर लिखिए ।

(1) $\sin\theta \operatorname{cosec}\theta =$ कितना ?

- (A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\sqrt{2}$

(2) निम्नलिखित में से $\operatorname{cosec}45^\circ$ का मान कौन - सा है ?

- (A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(3) $1 + \tan^2\theta =$ कितना ?

- (A) $\cot^2\theta$ (B) $\operatorname{cosec}^2\theta$ (C) $\sec^2\theta$ (D) $\tan^2\theta$

(4) जब हम क्षैतिज समांतर रेखा के ऊपर की दिशा में देखते हैं । तब कोण बनता है ।

- (A) उन्नत कोण (B) अवनत कोण (C) शून्य (D) रेखीय

2. यदि $\sin\theta = \frac{11}{61}$, तो सर्वसमिका का उपयोग कर $\cos\theta$ का मान ज्ञात कीजिए ।

3. यदि $\tan\theta = 2$, तो अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए ।

4. यदि $\sec\theta = \frac{13}{12}$, तो अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए ।

5. सिद्ध कीजिए ।

(1) $\sec\theta (1 - \sin\theta) (\sec\theta + \tan\theta) = 1$

(2) $(\sec\theta + \tan\theta) (1 - \sin\theta) = \cos\theta$

(3) $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \times \operatorname{cosec}^2\theta$

(4) $\cot^2\theta - \tan^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - \sec^2\theta$

(5) $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$

(6) $\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta} = 2 \sec^2\theta$

(7) $\sec^6x - \tan^6x = 1 + 3\sec^2x \times \tan^2x$

(8) $\frac{\tan\theta}{\sec\theta+1} + \frac{\sec\theta-1}{\tan\theta}$

(9) $\frac{\tan^3\theta-1}{\tan\theta-1} = \sec^2\theta + \tan\theta$



आओ सीखें

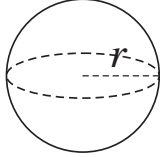

- विभिन्न घनाकृतियों के पृष्ठफल तथा घनफल पर आधारित मिश्रित उदाहरण
- वृत्त चाप - वृत्त चाप की लंबाई
- वृत्त के द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल
- वृत्तखंड का क्षेत्रफल



थोड़ा याद करें

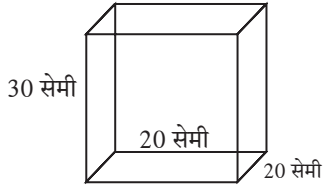
पिछली कक्षा में हमने कुछ त्रिमितीय आकृतियों के पृष्ठफल तथा घनफल का अध्ययन किया है। इसके लिए उपयोग में आनेवाले सूत्रों को याद करें।

क्र.	त्रिमितीय आकृति	सूत्र
1.	घनाभ 	ऊर्ध्वाधर पृष्ठों का पृष्ठफल = $2h(l + b)$ संपूर्ण पृष्ठफल = $2(lb + bh + hl)$ घनाभ का घनफल = lbh
2.	समघन 	समघन के ऊर्ध्वाधर पृष्ठों का पृष्ठफल = $4l^2$ समघन का संपूर्ण पृष्ठफल = $6l^2$ समघन का घनफल = l^3
3.	लंबवृत्ताकार बेलन 	लंबवृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल = $2\pi rh$ लंबवृत्ताकार बेलन का संपूर्ण पृष्ठफल = $2\pi r(r + h)$ लंबवृत्ताकार बेलन का घनफल = $\pi r^2 h$
4.	शंकु 	शंकु की तिरछी ऊँचाई (l) = $\sqrt{h^2 + r^2}$ शंकु का वक्रपृष्ठफल = πrl शंकु का संपूर्ण पृष्ठफल = $\pi r(r + l)$ शंकु का घनफल = $\frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

क्र.	त्रिमितीय आकृति	सूत्र
5.	गोला 	गोले का पृष्ठफल = $4\pi r^2$ गोले का घनफल = $\frac{4}{3}\pi r^3$
6.	अर्धगोला 	अर्धगोले का वक्रपृष्ठफल = $2\pi r^2$ अर्धगोले का संपूर्ण पृष्ठफल = $3\pi r^2$ अर्धगोले का घनफल = $\frac{2}{3}\pi r^3$

निम्नलिखित उदाहरणों को हल कीजिए ।

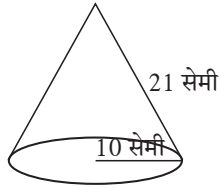
उदा.(1)



आकृति 7.1

संलग्न आकृति में 30 सेमी ऊँचाई, 20 सेमी लंबाई तथा 20 सेमी चौड़ाई वाला तेल का डिब्बा है । उसमें कितने लीटर तेल भरा जा सकेगा ? (1 लीटर = 1000 सेमी³)

उदा.(2)



आकृति 7.2

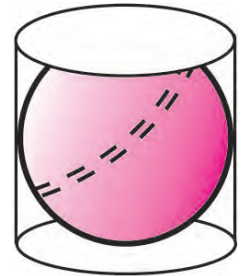
संलग्न आकृति में जोकर की टोपी और टोपी का माप दर्शाया गई है । दिए गए माप के अनुसार इस टोपी को बनाने में कितना कपड़ा लगेगा ?



थोड़ा सोचें

संलग्न आकृति में दर्शाए अनुसार किसी लंब वृत्ताकार बेलन के अंतःभाग में एक गोला है । गोला वृत्ताकार बेलन के आधार, ऊपरी पृष्ठभाग और वक्र पृष्ठभाग को स्पर्श करती है । वृत्त के आधार की त्रिज्या r हो तो,

1. गोले की त्रिज्या और वृत्ताकार बेलन की त्रिज्या का अनुपात कितना होगा ?
2. वृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल और गोले के वक्रपृष्ठफल का अनुपात कितना होगा ?
3. वृत्ताकार बेलन का घनफल और गोले के घनफल का अनुपात कितना होगा ?



आकृति 7.3

उदा. (1) किसी वृत्ताकार बेलन के आकारवाले पानी की टंकी की त्रिज्या 2.8 मी और उंचाई 3.5 मी है। तो उस टंकी में कितने लीटर पानी भर जा सकेगा ? एक व्यक्ति को प्रतिदिन औसतन 70 लीटर पानी लगता हो तो पूरी भरी हुई टंकी का पानी प्रतिदिन कितने व्यक्तियों के लिए पर्याप्त होगा? ($\pi = \frac{22}{7}$)

हल : त्रिज्या (r) = 2.8 मीटर, उंचाई (h) = 3.5 मीटर, $\pi = \frac{22}{7}$
 पानी की टंकी की धारिता = वृत्ताकार बेलन के आकारवाली पानी की टंकी का घनफल
 $= \pi r^2 h$
 $= \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \times 3.5$
 $= 86.24 \text{ मी}^3$
 $= 86.24 \times 1000 \text{ लीटर}$ ($\because 1 \text{ मी}^3 = 1000 \text{ लीटर}$)
 $= 86240.00 \text{ लीटर}$

\therefore टंकी में 86240 लीटर पानी भर जा सकेगा।

70 लीटर पानी प्रतिदिन एक व्यक्ति के लिए पर्याप्त होता है।

\therefore संपूर्ण भरी हुई टंकी का पानी प्रतिदिन $\frac{86240}{70} = 1232$ व्यक्तियों के लिए पर्याप्त होगा।

उदा. (2) 30 सेमी त्रिज्या के एक ठोस गोले को पिघलाकर उससे 10 सेमी त्रिज्यावाले तथा 6 सेमी उंचाई वाले ठोस वृत्ताकार बेलन बनाए गए तो उससे बने वृत्ताकार बेलनों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : गोले की त्रिज्या $r = 30$ सेमी
 वृत्ताकार बेलन की त्रिज्या $R = 10$ सेमी
 वृत्ताकार बेलन की उंचाई $H = 6$ सेमी
 माना n वृत्ताकार बेलन बनेंगे

\therefore गोले का घनफल = $n \times$ एक वृत्ताकार बेलन का घनफल

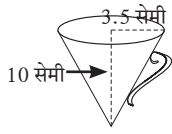
\therefore वृत्ताकार बेलन की संख्या = $n = \frac{\text{गोले का घनफल}}{\text{एक वृत्ताकार बेलन का घनफल}}$

$$= \frac{\frac{4}{3} \pi (r)^3}{\pi (R)^2 H}$$

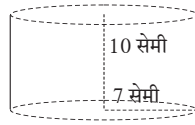
$$= \frac{\frac{4}{3} \times (30)^3}{10^2 \times 6} = \frac{\frac{4}{3} \times 30 \times 30 \times 30}{10 \times 10 \times 6} = 60$$

\therefore वृत्ताकार बेलनों की कुल संख्या 60

1. किसी शंकु के आधार की त्रिज्या 1.5 सेमी तथा लंब ऊँचाई 5 सेमी हो तो शंकु का घनफल ज्ञात कीजिए ।
2. 6 सेमी व्यासवाले गोले का घनफल ज्ञात कीजिए ।
3. किसी लंब वृत्ताकार बेलन के आधार की त्रिज्या 5 सेमी तथा ऊँचाई क्रमशः 40 सेमी हो तो उसका संपूर्ण पृष्ठफल ज्ञात कीजिए ।
4. किसी गोले की त्रिज्या 7 सेमी हो तो उसका पृष्ठफल ज्ञात कीजिए ।
5. किसी धातु के वृत्ताकार बेलन की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई 44 सेमी, 21 सेमी और 12 सेमी है । उसे पिघलाकर 24 सेमी ऊँचाई का शंकु बनाया गया तो शंकु के आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।



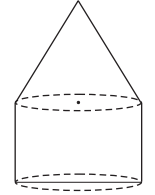
आकृति 7.8
शंक्वाकार पानी का जग



आकृति 7.9
वृत्ताकार बेलन के आकार का पात्र

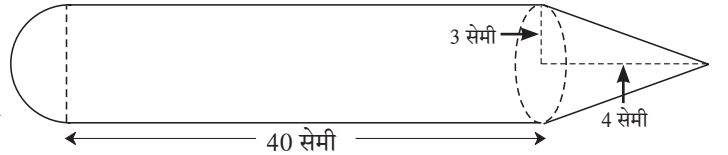
आकृति 7.8 तथा 7.9 में निरीक्षण द्वारा ज्ञात कीजिए कि वृत्ताकार बेलन के आकार वाले बर्तन में कितना पानी भरा जाएगा ?

7. किसी वृत्ताकार बेलन तथा शंकु का आधार समान है । वृत्ताकार बेलन पर शंकु को रखें वृत्ताकार बेलन की ऊँचाई 3 सेमी तथा उसके आधार का क्षेत्रफल 100 वर्ग सेमी है यदि संपूर्ण घनाकृति का घनफल 500 घसेमी हो तो संपूर्ण घनाकृति की ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।



आकृति 7.10

8. संलग्न आकृति 7.11 में दी गई जानकारी के आधार पर अर्धगोले, वृत्ताकार बेलन तथा शंकु से बनाए गए खिलौने का संपूर्ण पृष्ठफल ज्ञात कीजिए ।



आकृति 7.11

9. आकृति 7.12 में वृत्ताकार बेलन के आकार की चपटी गोली का 10 सेमी लंबाई का एक वेष्टन है । एक गोली की त्रिज्या 7 मिमी और ऊँचाई 5 मिमी हो तो ऐसी कितनी गोलियाँ उस वेष्टन में समाविष्ट होंगी ?



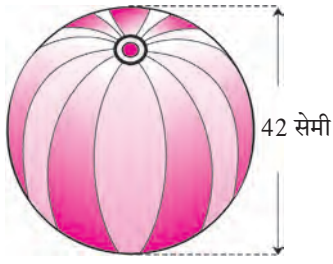
आकृति 7.12

10. आकृति 7.13 में बच्चों का एक खिलौना दर्शाया गया है । खिलौना एक अर्धगोले तथा शंकु की सहायता से बनाया गया है । आकृति में दर्शाए गए माप के आधार पर खिलौने का घनफल तथा पृष्ठफल ज्ञात कीजिए । ($\pi = 3.14$)



आकृति 7.13

11. आकृति में दर्शाए अनुसार बीच बॉल का पृष्ठफल तथा घनफल ज्ञात कीजिए ।



आकृति 7.14

12. आकृति में दर्शाए अनुसार लंब वृत्ताकार बेलन वाले ग्लास में पानी है तथा उसमें 2 सेमी व्यास वाले धातु की एक गोली डुबाई गई है । तो पानी का घनफल ज्ञात कीजिए ।



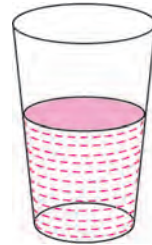
आकृति 7.15



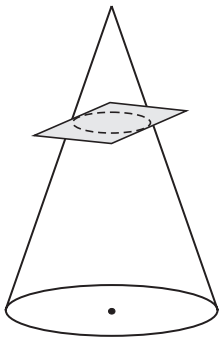
आओ जानें

शंकु छेद (Frustum of the cone)

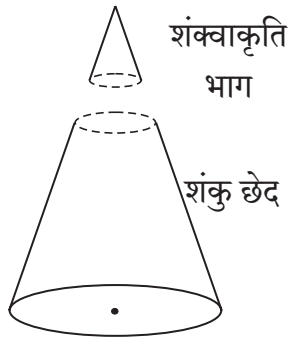
हम पानी पीने के लिए शंक्वाकार प्याले (ग्लास) का उपयोग करते हैं । इस प्याले का आकार उसी प्रकार पानी का आकार यह शंकु छेद के आकार का होता है ।



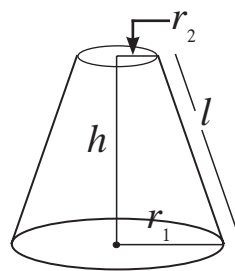
आकृति 7.16



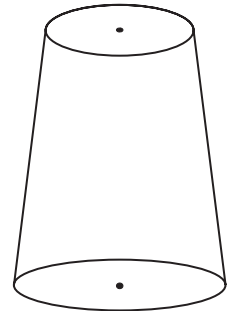
आकृति 7.17
शंकु काटने पर



आकृति 7.18
शंकु को काटने पर
अलग हुए दो भाग



आकृति 7.19
शंकु छेद



आकृति 7.20
उल्टा रखा गया गिलास

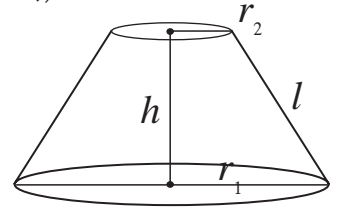
आकृति में एक शंकु को उल्टा रखा हुआ दर्शाया गया है । इस शंकु को उसके आधार के समांतर काटा गया । इस प्रकार हुए दो भागों में से एक भाग शंकु ही है । और शेष भाग को शंकु छेद कहते हैं ।

शंकु की तरह ही शंकु छेद का पृष्ठफल तथा घनफल ज्ञात किया जा सकता है । इसके लिए हम आगे दिए गए सूत्रों का उपयोग करेंगे ।



इसे ध्यान में रखें

h = शंकु छेद की ऊँचाई, l = शंकु छेद की तिरछी ऊँचाई,
 r_1 तथा r_2 = शंकु छेद के वृत्ताकार भाग की त्रिज्या ($r_1 > r_2$)
 शंकु छेद की तिरछी ऊँचाई $= l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$
 शंकु छेद का वक्रपृष्ठफल $= \pi l (r_1 + r_2)$
 शंकु छेद का संपूर्ण पृष्ठफल $= \pi l (r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$
 शंकु छेद का घनफल $= \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$



आकृति 7.21

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) किसी एक शंकु छेद के आकार की बाल्टी की ऊँचाई 28 सेमी है। बाल्टी के दोनों वृत्ताकार भाग की त्रिज्या 12 सेमी तथा 15 सेमी है तो बाल्टी में भरे जाने वाले पानी की मात्रा ज्ञात कीजिए ? ($\pi = \frac{22}{7}$)

हल : बाल्टी के वृत्ताकार भाग की त्रिज्या $r_1 = 15$ सेमी, $r_2 = 12$ सेमी
 बाल्टी की ऊँचाई $h = 28$ सेमी

बाल्टी में भरे जाने वाले पानी की मात्रा = शंकु छेद का घनफल

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2) \\
 &= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 28 (15^2 + 12^2 + 15 \times 12) \\
 &= \frac{22 \times 4}{3} \times (225 + 144 + 180) \\
 &= \frac{22 \times 4}{3} \times 549 \\
 &= 88 \times 183 \\
 &= 16104 \text{ सेमी}^3 = 16.104 \text{ लीटर}
 \end{aligned}$$



आकृति 7.22

बाल्टी में पानी की मात्रा 16.104 लीटर है।

उदा. (2) शंकु छेद के वृत्ताकार भाग की त्रिज्या क्रमशः 14 सेमी तथा 8 सेमी है। यदि शंकु छेद की ऊँचाई 8 सेमी हो तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$)

(i) शंकु छेद का वक्रपृष्ठफल (ii) शंकु छेद का संपूर्ण पृष्ठफल (iii) शंकु छेद का घनफल

हल : त्रिज्या $r_1 = 14$ सेमी, $r_2 = 8$ सेमी, ऊँचाई $h = 8$ सेमी

$$\begin{aligned}
 \text{शंकु छेद की तिरछी ऊँचाई } l &= \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2} \\
 l &= \sqrt{8^2 + (14 - 8)^2} \\
 l &= \sqrt{64 + 36} = 10 \text{ सेमी}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{शंकुछेद का वक्रपृष्ठफल} &= \pi(r_1 + r_2) l \\ &= 3.14 \times (14 + 8) \times 10 \\ &= 690.8 \text{ वसेमी}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{शंकुछेद का संपूर्ण पृष्ठफल} &= \pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 \\ &= 3.14 \times 10 (14 + 8) + 3.14 \times 14^2 + 3.14 \times 8^2 \\ &= 690.8 + 615.44 + 200.96 \\ &= 690.8 + 816.4 \\ &= 1507.2 \text{ वसेमी}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{शंकुछेद का घनफल} &= \frac{1}{3} \pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2) \\ &= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 8 (14^2 + 8^2 + 14 \times 8) \\ &= 3114.88 \text{ घसेमी}\end{aligned}$$

प्रश्नसंग्रह 7.2

- 30 सेमी ऊँचाई वाले शंकुछेद के आकार वाली बाल्टी के वृत्ताकार भागों की त्रिज्या 14 सेमी तथा 7 सेमी है उस बाल्टी में कितने लीटर पानी भरा जा सकता है ? ज्ञात कीजिए । (1 लीटर = 1000 घसेमी)
- शंकुछेद के वृत्ताकार भाग की त्रिज्या क्रमशः 14 सेमी तथा 6 सेमी तथा उसकी ऊँचाई 6 सेमी हो तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए । ($\pi = 3.14$)
(1) शंकुछेद का वक्रपृष्ठफल (2) शंकुछेद का संपूर्ण पृष्ठफल (3) शंकुछेद का घनफल
- किसी शंकुछेद के वृत्ताकार आधार की परिधि क्रमशः 132 सेमी तथा 88 सेमी तथा ऊँचाई 24 सेमी है । तो उस शंकुछेद का वक्रपृष्ठफल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित कृति पूर्ण कीजिए । ($\pi = \frac{22}{7}$)

$$\begin{aligned}\text{परिधि}_1 &= 2\pi r_1 = 132 \\ r_1 &= \frac{132}{2\pi} = \boxed{} \text{ सेमी}\end{aligned}$$

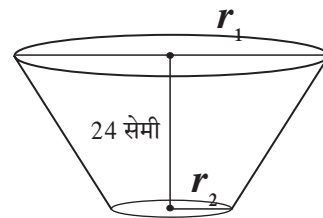
$$\begin{aligned}\text{परिधि}_2 &= 2\pi r_2 = 88 \\ r_2 &= \frac{88}{2\pi} = \boxed{} \text{ सेमी}\end{aligned}$$

$$\text{शंकुछेद की तिरछी ऊँचाई} = l$$

$$\text{तथा } l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$$

$$\therefore l = \sqrt{\boxed{}^2 + \boxed{}^2}$$

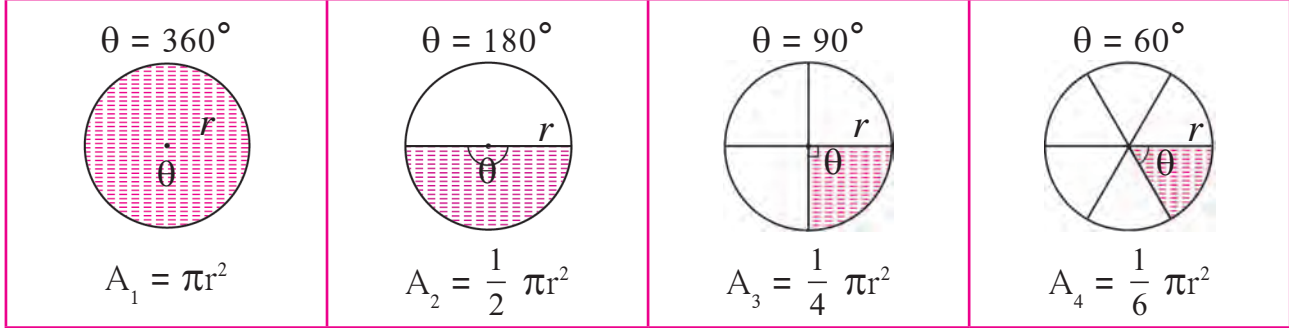
$$l = \boxed{} \text{ सेमी}$$



आकृति 7.23

द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल (Area of a sector)

नीचे दी गई आकृति में दर्शाएनुसार समान त्रिज्यावाले वृत्त के छायांकित भागों के क्षेत्रफल का निरीक्षण करके दी गई सारिणी पूर्ण कीजिए ।



आकृति 7.26

वृत्त के केंद्रीय कोण का माप = 360° = पूर्ण कोण

वृत्त के केंद्रीय कोण का माप = 360° , वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2			
द्वैत्रिज्य	द्वैत्रिज्य के चाप का माप	$\frac{\theta}{360}$	द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल A
A_1	360°	$\frac{360}{360} = 1$	$1 \times \pi r^2$
A_2	180°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times \pi r^2$
A_3	90°	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times \pi r^2$
A_4	60°
A	θ	$\frac{\theta}{360}$	$\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

सारिणी से ध्यान में आता है कि वृत्त के क्षेत्रफल को $\frac{\theta}{360}$ से गुणा करने पर चाप का माप θ वाले द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल प्राप्त होता है । इसे सूत्र के रूप में निम्नलिखित प्रकार से लिखते हैं ।

$$\text{द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल (A)} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$\text{इस सूत्र से } \frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{360} \quad \text{अर्थात् } \frac{\text{द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल}}{\text{वृत्त का क्षेत्रफल}} = \frac{\theta}{360}$$

वृत्त चाप की लंबाई और द्वैत्रिज्य के क्षेत्रफल में संबंध

$$\text{द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल } A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 \dots\dots\dots \text{I}$$

$$\text{उसी प्रकार वृत्त चाप की लंबाई } (l) = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

$$\therefore \frac{\theta}{360} = \frac{l}{2\pi r} \dots\dots\dots \text{II}$$

$$A = \frac{l}{2\pi r} \times \pi r^2 \dots\dots\dots \text{I तथा II से}$$

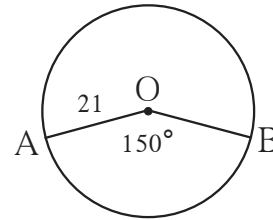
$$A = \frac{1}{2} lr = \frac{lr}{2}$$

$$\therefore \text{द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल} = \frac{\text{वृत्त चाप की लंबाई} \times \text{त्रिज्या}}{2}$$

$$\text{उसी प्रकार } \frac{A}{\pi r^2} = \frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{360}$$

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) 21 सेमी त्रिज्यावाले द्वैत्रिज्य के केंद्रीय कोण का माप 150° हो तो द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल तथा संगत वृत्त चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए।



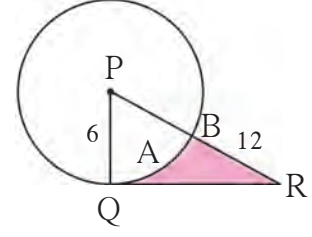
आकृति 7.28

हल : $r = 21$ सेमी, $\theta = 150$, $\pi = \frac{22}{7}$

$$\begin{aligned} \text{द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल (A)} &= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 \\ &= \frac{150}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \\ &= \frac{1155}{2} \text{ सेमी}^2 = 577.5 \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{वृत्त चाप की लंबाई} &= l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r \\ &= \frac{150}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \\ &= 55 \text{ सेमी} \end{aligned}$$

उदा. (2) आकृति में वृत्त का केंद्र P और त्रिज्या 6 सेमी है। रेख QR वृत्त की स्पर्श रेखा है। PR = 12 सेमी हो तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\sqrt{3} = 1.73$)



आकृति 7.29

हल : वृत्त के स्पर्श बिंदु से खींची गई त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लंब होती है।

$$\therefore \Delta PQR \text{ में, } \angle PQR = 90^\circ, \quad PQ = 6 \text{ सेमी, } PR = 12 \text{ सेमी}$$

$$\therefore PQ = \frac{PR}{2}$$

यदि समकोण त्रिभुज की एक भुजा की लंबाई उसके कर्ण की लंबाई की आधी हो तो उस भुजा के सम्मुख कोण का माप 30° होता है।

$$\therefore \angle R = 30^\circ \text{ और } \angle P = 60^\circ$$

$$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ \text{ प्रमेय से, } QR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times PR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}$$

$$QR = 6\sqrt{3} \text{ सेमी}$$

$$\begin{aligned} \therefore A(\Delta PQR) &= \frac{1}{2} QR \times PQ \\ &= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 6 \\ &= 18\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$= 18 \times 1.73$$

$$= 31.14 \text{ सेमी}^2$$

$$\text{द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$\therefore A(P-QAB) = \frac{60}{360} \times 3.14 \times 6^2$$

$$= \frac{1}{6} \times 3.14 \times 6 \times 6$$

$$= 3.14 \times 6$$

$$= 18.84 \text{ सेमी}^2$$

$$\text{छायांकित भाग का क्षेत्रफल} = A(\Delta PQR) - A(P-QAB)$$

$$= 31.14 - 18.84$$

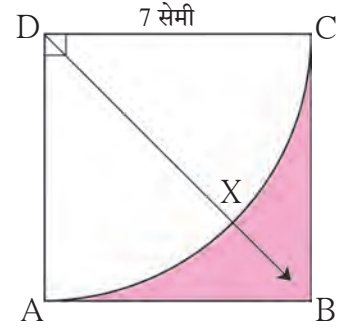
$$= 12.30 \text{ सेमी}^2$$

$$\text{छायांकित भाग का क्षेत्रफल} = 12.30 \text{ सेमी}^2$$

उदा. (3) दी गई आकृति में वर्ग ABCD की प्रत्येक भुजा की लंबाई 7 सेमी है। बिंदु D को केंद्र मानकर तथा DA त्रिज्या लेकर खींचा गया द्वैत्रिज्य D - AXC है, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए रिक्त चौखटों को भरकर उदाहरण पूर्ण कीजिए।

हल : वर्ग का क्षेत्रफल = (सूत्र)
 =
 = 49 वर्ग सेमी

द्वैत्रिज्य (D- AXC) का क्षेत्रफल = (सूत्र)
 = $\times \frac{22}{7} \times$
 = 38.5 वर्ग सेमी



आकृति 7.30

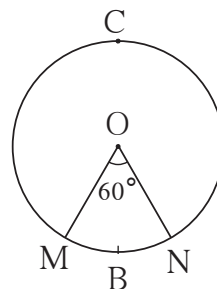
छायांकित भाग का क्षेत्रफल = का क्षेत्रफल - का क्षेत्रफल
 = वर्ग सेमी - वर्ग सेमी
 = वर्ग सेमी

प्रश्नसंग्रह 7.3

1. किसी वृत्त की त्रिज्या 10 सेमी तथा वृत्त चाप का माप 54° हो तो उस चाप द्वारा सीमित द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$)
2. किसी वृत्तचाप का माप 80° और त्रिज्या 18 सेमी है तो उसके वृत्तचाप की लंबाई ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$)
3. किसी द्वैत्रिज्य की त्रिज्या 3.5 सेमी तथा उसके वृत्त चाप की लंबाई 2.2 सेमी हो तो द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. किसी वृत्त की त्रिज्या 10 सेमी तथा उसके लघु द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल 100 वर्ग सेमी हो तो उसके दीर्घ द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$)
5. 15 सेमी त्रिज्यावाले किसी द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल 30 वर्ग सेमी हो तो संगत वृत्त चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए।
6. संलग्न आकृति में वृत्त की त्रिज्या 7 सेमी है और

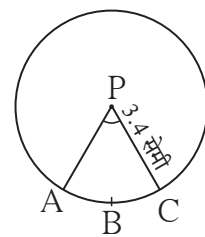
$m(\text{चाप MBN}) = 60^\circ$

- तो (1) वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
 (2) $A(O - MBN)$ ज्ञात कीजिए।
 (3) $A(O - MCN)$ ज्ञात कीजिए।

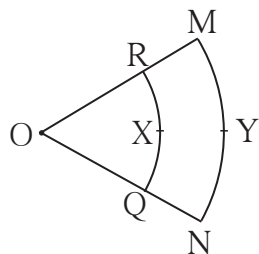


आकृति 7.31

7. 3.4 सेमी त्रिज्यावाले किसी द्वैत्रिज्य की परिमिति 12.8 सेमी है तो द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।



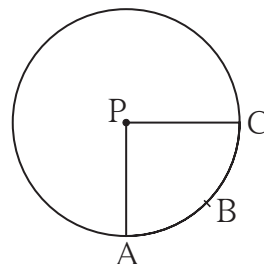
आकृति 7.32



आकृति 7.33

8. संलग्न आकृति में बिंदु O यह द्वैत्रिज्य का केंद्र है । $\angle ROQ = \angle MON = 60^\circ$, $OR = 7$ सेमी, $OM = 21$ सेमी हो तो चाप RXQ तथा चाप MYN की लंबाई ज्ञात कीजिए । ($\pi = \frac{22}{7}$)

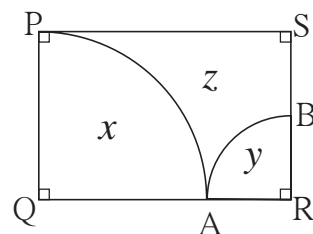
9. संलग्न आकृति में $A(P-ABC) = 154$ वर्ग सेमी और वृत्त की त्रिज्या 14 सेमी हो, तो
(1) $\angle APC$ का माप ज्ञात कीजिए ।
(2) चाप ABC की लंबाई ज्ञात कीजिए ।



आकृति 7.34

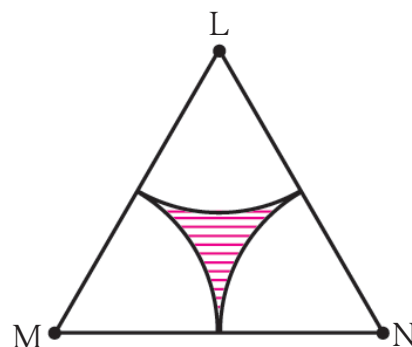
10. किसी द्वैत्रिज्य की त्रिज्या 7 सेमी है । यदि द्वैत्रिज्य के चापों के माप निम्नलिखित हों तो उन द्वैत्रिज्यों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।
(1) 30° (2) 210° (3) 3 समकोण
11. लघु द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल 3.85 वर्ग सेमी तथा उसके संगत केंद्रीय कोण का माप 36° हो तो उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।

12. संलग्न आकृति 7.35 में $\square PQRS$ एक आयत है । $PQ = 14$ सेमी, $QR = 21$ सेमी, हो तो आकृति में दर्शाएनुसार x , y और z इस प्रत्येक भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।



आकृति 7.35

13. ΔLMN समबाहु त्रिभुज है । $LM = 14$ सेमी. त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष बिंदु को केंद्र मानकर तथा 7 सेमी त्रिज्या लेकर आकृति में दर्शाएनुसार तीन द्वैत्रिज्य खींचकर उसके आधार पर,
(1) $A(\Delta LMN) = ?$
(2) एक द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।
(3) तीनों द्वैत्रिज्यों का संपूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।
(4) रेखांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।



आकृति 7.36

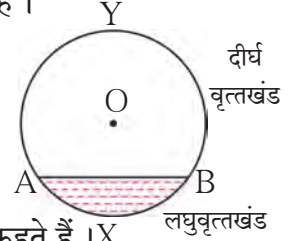


वृत्तखंड (Segment of a circle)

वृत्त की जीवा तथा संगत वृत्त चाप द्वारा सीमित किए गए भाग को वृत्तखंड कहते हैं।

लघु वृत्तखंड : जीवा तथा लघु वृत्तचाप के द्वारा सीमित किए हुए भाग को लघु वृत्तखंड कहते हैं। आकृति में वृत्तखंड AXB लघु वृत्तखंड है।

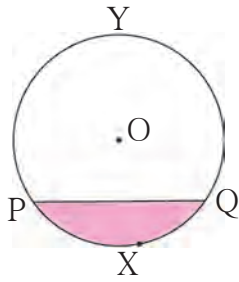
दीर्घ वृत्तखंड : जीवा तथा दीर्घ वृत्तचाप द्वारा सीमित किए हुए भाग को दीर्घ वृत्तखंड कहते हैं। X लघु वृत्तखंड है।



आकृति 7.37

अर्ध वृत्तखंड : व्यास द्वारा बनने वाले वृत्तखंडों को अर्ध वृत्तखंड कहते हैं।

वृत्तखंड का क्षेत्रफल (Area of a segment)

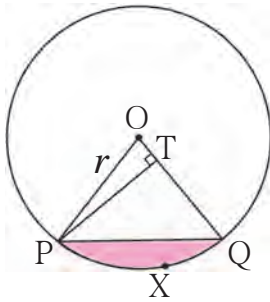


आकृति 7.38

आकृति में PXQ लघु वृत्तखंड है तथा PYQ दीर्घ वृत्तखंड है।

लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं?

वृत्तकेंद्र O से OP तथा OQ दो त्रिज्याएँ खींचें। हम द्वैत्रिज्य O-PXQ का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं। इसी प्रकार ΔOPQ का क्षेत्रफल भी ज्ञात कर सकते हैं। द्वैत्रिज्य के क्षेत्रफल में से त्रिभुज का क्षेत्रफल घटाने पर वृत्तखंड का क्षेत्रफल प्राप्त होता है।



आकृति 7.39

$$\begin{aligned} \text{वृत्तखंड PXQ का क्षेत्रफल} &= \text{द्वैत्रिज्य (O - PXQ) का क्षेत्रफल} - \Delta OPQ \text{ का क्षेत्रफल} \\ &= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \Delta OPQ \text{ का क्षेत्रफल} \text{----- (I)} \end{aligned}$$

आकृति 7.39 ΔOPQ में, रेखा PT यह भुजा OQ पर डाला गया लंब है,

$$\text{समकोण } \Delta OTP \text{ में, } \sin \theta = \frac{PT}{OP}$$

$$\therefore PT = OP \times \sin \theta$$

$$PT = r \sin \theta \quad (\because OP = r)$$

$$\begin{aligned} \Delta OPQ \text{ का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} \\ &= \frac{1}{2} \times OQ \times PT \\ &= \frac{1}{2} \times r \times r \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \times r^2 \sin \theta \text{ ----- (ii)} \end{aligned}$$

(I) तथा (II) से,

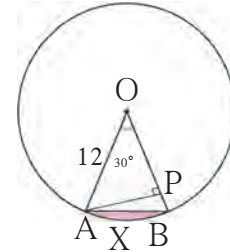
$$\begin{aligned} \text{वृत्तखंड PXQ का क्षेत्रफल} &= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta \\ &= r^2 \left[\frac{\pi \theta}{360} - \frac{\sin \theta}{2} \right] \end{aligned}$$

(हमने न्यूनकोण के साइन अनुपात का अध्ययन किया है इसलिए ध्यान रखें कि θ का माप 90° या उससे कम होने पर ही इस सूत्र का उपयोग कर सकते हैं।)

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) आकृति में $\angle AOB = 30^\circ$, $OA = 12$ सेमी हो तो लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

$$(\pi = 3.14)$$



आकृति 7.40

विधि I :

$$r = 12, \theta = 30^\circ, \pi = 3.14$$

द्वैत्रिज्य (O-AXB) का

$$\begin{aligned} \text{क्षेत्रफल} &= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 \\ &= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 12^2 \\ &= 3.14 \times 12 \\ &= 37.68 \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(\Delta OAB) &= \frac{1}{2} r^2 \times \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \times 12^2 \times \sin 30 \\ &= \frac{1}{2} \times 144 \times \frac{1}{2} \dots (\because \sin 30 = \frac{1}{2}) \\ &= 36 \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{वृत्तखंड AXB का क्षेत्रफल} &= \text{द्वैत्रिज्य (O - AXB) का क्षेत्रफल} - A(\Delta OAB) \\
&= 37.68 - 36 \\
&= 1.68 \text{ वसेमी}
\end{aligned}$$

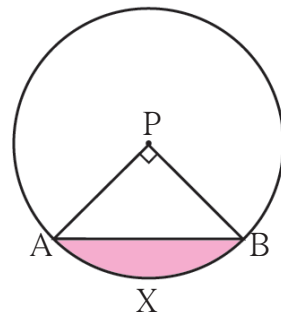
विधि II :

$$\begin{aligned}
\text{वृत्तखंड AXB का क्षेत्रफल} &= r^2 \left[\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\theta}{2} \right] \\
&= 12^2 \left[\frac{3.14 \times 30}{360} - \frac{\sin 30}{2} \right] \\
&= 144 \left[\frac{3.14}{12} - \frac{1}{2 \times 2} \right] \\
&= \frac{144}{4} \left[\frac{3.14}{3} - 1 \right] \\
&= 36 \left[\frac{3.14 - 3}{3} \right] \\
&= \frac{36}{3} \times 0.14 = 12 \times 0.14 \\
&= 1.68 \text{ वसेमी}
\end{aligned}$$

उदा. (2) P केंद्रवाले किसी वृत्त की त्रिज्या 10 सेमी है। जीवा AB द्वारा वृत्त केंद्र पर समकोण बनाया गया हो तो लघु वृत्तखंड तथा दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$)

हल : $r = 10$ सेमी, $\theta = 90$, $\pi = 3.14$

$$\begin{aligned}
\text{द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल} &= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 \\
&= \frac{90}{360} \times 3.14 \times 10^2 \\
&= \frac{1}{4} \times 314 \\
&= 78.5 \text{ वसेमी} \\
A(\Delta APB) &= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} \\
&= \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \\
&= 50 \text{ वसेमी}
\end{aligned}$$



आकृति 7.41

$$\begin{aligned}
\text{लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल} &= \text{द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल} - \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} \\
&= 78.5 - 50 \\
&= 28.5 \text{ वसेमी}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल} &= \text{वृत्त का क्षेत्रफल} - \text{लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल} \\
&= 3.14 \times 10^2 - 28.5 \\
&= 314 - 28.5 \\
&= 285.5 \text{ वर्ग सेमी}
\end{aligned}$$

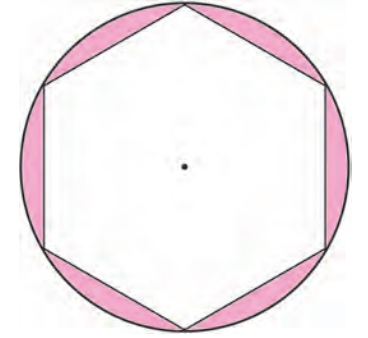
उदा. (3) 14 सेमी त्रिज्यावाले किसी वृत्त में समषट्भुज अंतर्लिखित किया गया है तो समषट्भुज के बाह्य तथा वृत्त के अंतःभाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$, $\sqrt{3} = 1.732$)

हल : समषट्भुज की भुजा = समषट्भुज के परिवृत्त की त्रिज्या

\therefore समषट्भुज की भुजा = 14 सेमी

$$\begin{aligned}
\text{समषट्भुज का क्षेत्रफल} &= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{भुजा})^2 \\
&= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14^2 \\
&= 509.208 \text{ वर्ग सेमी}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{वृत्त का क्षेत्रफल} &= \pi r^2 \\
&= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \\
&= 616 \text{ वर्ग सेमी}
\end{aligned}$$

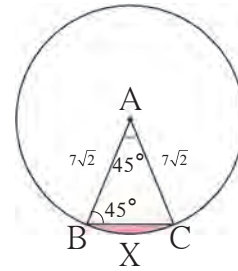


आकृति 7.42

$$\begin{aligned}
\text{समषट्भुज के बाह्य तथा वृत्त के अंतःभाग का क्षेत्रफल} &= \text{वृत्त का क्षेत्रफल} - \text{समषट्भुज का क्षेत्रफल} \\
&= 616 - 509.208 \\
&= 106.792 \text{ वर्ग सेमी}
\end{aligned}$$

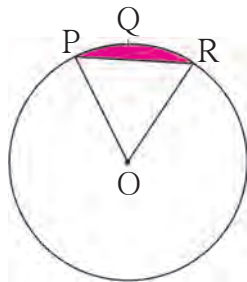
प्रश्नसंग्रह 7.4

1. आकृति 7.43 में बिंदु A केंद्रवाले वृत्त में $\angle ABC = 45^\circ$, $AC = 7\sqrt{2}$ सेमी, हो तो वृत्तखंड BXC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$, $\sqrt{2} = 1.41$)



आकृति 7.43

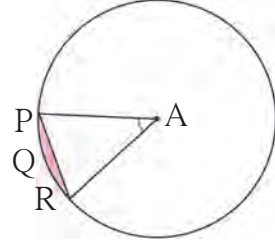
- 2.



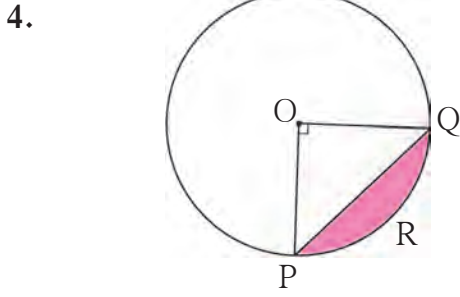
आकृति 7.44

आकृति 7.44 में बिंदु O वृत्त का केंद्र है। $m(\text{चाप PQR}) = 60^\circ$, $OP = 10$ सेमी, हो तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$)

3. संलग्न आकृति 7.45 में A केंद्र वाले वृत्त में $\angle PAR = 30^\circ$ AP = 7.5 हो तो, वृत्तखंड PQR का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$)



आकृति 7.45



आकृति 7.46

4. आकृति 7.46 में O केंद्रवाले किसी वृत्त में PQ जीवा है। $\angle POQ = 90^\circ$, और छायांकित भाग का क्षेत्रफल 114 वसेमी हो तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$)
5. 15 सेमी त्रिज्यावाले किसी वृत्त में जीवा PQ वृत्त के केंद्र से 60° का कोण बनाती है। उस जीवा से बनने वाले दीर्घ वृत्तखंड और लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$)

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 7

1. नीचे दिए गए बहुवैकल्पिक प्रश्नों में से उचित विकल्प चुनकर लिखिए।
- (1) किसी वृत्त की परिधि तथा क्षेत्रफल का अनुपात 2:7 हो तो उस वृत्त की परिधि कितनी होगी?
 (A) 14π (B) $\frac{7}{\pi}$ (C) 7π (D) $\frac{14}{\pi}$
- (2) 44 सेमी लंबाईवाले किसी वृत्त चाप का माप 160° हो तो उस वृत्त की परिधि कितनी होगी?
 (A) 66 सेमी (B) 44 सेमी (C) 160 सेमी (D) 99 सेमी
- (3) किसी चाप का माप 90° तथा त्रिज्या 7 सेमी हो तो द्वैत्रिज्य की परिमिति ज्ञात कीजिए।
 (A) 44 सेमी (B) 25 सेमी (C) 36 सेमी (D) 56 सेमी
- (4) किसी शंकु के आधार की त्रिज्या 7 सेमी तथा ऊँचाई 24 सेमी हो तो शंकु का वक्रपृष्ठफल कितना होगा?
 (A) 440 सेमी² (B) 550 सेमी² (C) 330 सेमी² (D) 110 सेमी²
- (5) 5 सेमी त्रिज्या वाले किसी लंबवृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल 440 सेमी² हो तो उस लंबवृत्ताकार बेलन की ऊँचाई कितनी होगी?
 (A) $\frac{44}{\pi}$ सेमी (B) 22π सेमी (C) 14π सेमी (D) $\frac{22}{\pi}$ सेमी
- (6) किसी शंकु को पिघलाकर उसके आधार की त्रिज्या के बराबर त्रिज्या वाला लंबवृत्ताकार बेलन बनाया गया। यदि लंबवृत्ताकार बेलन की ऊँचाई 5 सेमी हो तो शंकु की ऊँचाई कितनी होगी ?
 (A) 15 सेमी (B) 10 सेमी (C) 18 सेमी (D) 5 सेमी

(7) 0.01 सेमी भुजावाले समघन का घनफल कितना घसेमी होगा ?

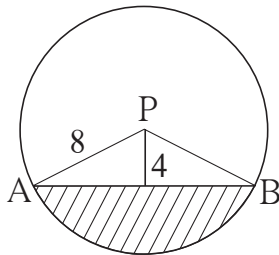
(A) 1 (B) 0.001 (C) 0.0001 (D) 0.000001

(8) एक घन मीटर घनफल वाले समघन के भुजा की लंबाई कितनी होगी ?

(A) 1 सेमी (B) 10 सेमी (C) 100 सेमी (D) 1000 सेमी

2. किसी शंकु छेद के आकारवाले कपड़े धोने के टब की ऊँचाई 45 सेमी है। टब के दोनों वृत्ताकार भाग की त्रिज्या क्रमशः 20 सेमी तथा 15 सेमी है। उस टब में पानी रखने की क्षमता कितनी होगी? ($\pi = \frac{22}{7}$)
- 3*. 1 सेमी त्रिज्यावाले प्लास्टिक की छोटी गोली पिघलाकर लंबवृत्ताकार बेलन के आकार की नली बनाई गई। नली की मोटाई 2 सेमी, ऊँचाई 90 सेमी तथा बाहरी त्रिज्या 30 सेमी हो तो नली बनवाने के लिए कितनी गोलियाँ पिघलानी पड़ेगी ?
4. 16 सेमी लंबाई, 11 सेमी चौड़ाई, 10 सेमी ऊँचाईवाले किसी धातु के आयताकार बेलन (घनाभ) से धातु के 2 मिमी मोटे तथा 2 सेमी व्यासवाले कुछ सिक्के बनाने हों तो ऐसे कितने सिक्के बनेंगे ज्ञात कीजिए ?
5. किसी मैदान को समतल करने के लिए 120 सेमी व्यास तथा 84 सेमी लंबाई वाले रोलर के 200 फेरे लगते हैं, तो 10 रु प्रतिवर्ग मीटर की दर से मैदान समतल करने में कितना खर्च लगेगा ?
6. किसी धातु के खोखले गोले का व्यास 12 सेमी तथा उसकी मोटाई 0.01 मीटर हो तब उस खोखले गोले के बाहरी भाग का पृष्ठफल ज्ञात कीजिए तथा धातु का घनत्व 8.88 ग्राम प्रतिघनसेमी हो तो उस खोखले गोले का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।
7. किसी वृत्ताकार बेलन के आकार वाली बाल्टी के आधार का व्यास 28 सेमी तथा ऊँचाई 20 सेमी है बाल्टी रेत से पूर्णतः भरी है उस बाल्टी की रेत को जमीन पर इसतरह पलटिए कि रेत का शंकु बने। रेत के शंकु की ऊँचाई 14 सेमी हो तो शंकु के आधार का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
8. 9 सेमी त्रिज्यावाले किसी धातु के ठोस गोले को पिघलाकर 4 मिमी व्यासवाला धातु का तार बनाया जाय तो उस तार की लंबाई कितने मीटर होगी ?
9. 6 सेमी त्रिज्यावाले किसी वृत्त के एक द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल 15π सेमी² हो तो उस द्वैत्रिज्य के चाप का माप तथा वृत्त चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए।

10.

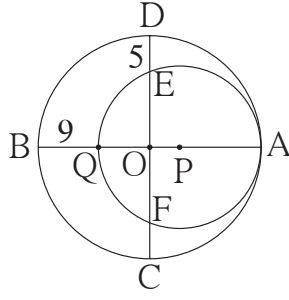


आकृति 7.47

संलग्न आकृति में वृत्त का केंद्र P और रेख AB वृत्त की जीवा है। PA = 8 सेमी और जीवा AB वृत्त के केंद्र से 4 सेमी की दूरी पर हो तो रेखांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$)

12.



आकृति 7.49

O और P केंद्रवाले वृत्त परस्पर बिंदु A पर अंतःस्पर्श करते हैं, यदि $BQ = 9$, $DE = 5$, हो तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करने के लिए नीचे दी गई कृति पूर्ण कीजिए।

हल : माना बड़े वृत्त की त्रिज्या = R

तथा छोटे वृत्त की त्रिज्या = r

OA, OB, OC और OD यह बड़े वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।

$$\therefore OA = OB = OC = OD = R$$

$$PQ = PA = r$$

$$OQ = OB - BQ = \boxed{}$$

$$OE = OD - DE = \boxed{}$$

P केंद्रवाले वृत्त में दो जीवाओं के अंतः प्रतिच्छेदन के गुणधर्मानुसार

$$OQ \times OA = OE \times OF$$

$$\boxed{} \times R = \boxed{} \times \boxed{} \quad (\because OE = OF)$$

$$R^2 - 9R = R^2 - 10R + 25$$

$$R = \boxed{}$$

$$AQ = 2r = AB - BQ$$

$$2r = 50 - 9 = 41$$

$$r = \boxed{} = \boxed{}$$

□□□



उत्तरसूची

प्रकरण 1 समरूपता

प्रश्नसंग्रह 1.1

1. $\frac{3}{4}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. 3 4. 1:1 5. (1) $\frac{BQ}{BC}$, (2) $\frac{PQ}{AD}$, (3) $\frac{BC}{DC}$, (4) $\frac{DC \times AD}{QC \times PQ}$

प्रश्नसंग्रह 1.2

1. (1) समद्विभाजक है। (2) समद्विभाजक नहीं है। (3) समद्विभाजक है।
 2. $\frac{PN}{NR} = \frac{PM}{MQ} = \frac{3}{2}$ अर्थात् रेखा $NM \parallel$ भुजा RQ 3. $QP = 3.5$ 5. $BQ = 17.5$
 6. $QP = 22.4$ 7. $x = 6$; $AE = 18$ 8. $LT = 4.8$ 9. $x = 10$
 10. दत्त, XQ , PD , दत्त, $\frac{XR}{RF} = \frac{XQ}{QE}$, समानुपात का मूलभूत प्रमेय, $\frac{XP}{PD} = \frac{XR}{RF}$

प्रश्नसंग्रह 1.3

1. $\Delta ABC \sim \Delta EDC$ कोको कसौटी 2. $\Delta PQR \sim \Delta LMN$; समरूपता की भुभुभु कसौटी के अनुसार
 3. 12 मीटर 4. $AC = 10.5$ 6. $OD = 4.5$

प्रश्नसंग्रह 1.4

1. क्षेत्रफलों का अनुपात = 9 : 25 2. $\frac{PQ^2}{9}$, $\frac{4}{9}$ 3. $A(\Delta PQR)$, $\frac{16}{25}$, $\frac{4}{5}$
 4. $MN = 15$ 5. 20 सेमी 6. $4\sqrt{2}$
 7. $\frac{PF}{25}$; x ; $2x$; $\angle FPQ$; $\angle FQP$; $\frac{DF^2}{PF^2}$; 20; 45; 45 - 20; 25 वर्ग इकाई

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. (1) (B), (2) (B), (3) (B), (4) (D), (5) (A)
 2. $\frac{7}{13}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{13}{20}$ 3. 9 सेमी 4. $\frac{3}{4}$ 5. 11 सेमी 6. $\frac{25}{81}$ 7. 4
 8. $PQ = 80$, $QR = \frac{280}{3}$, $RS = \frac{320}{3}$ 9. $\frac{PM}{MQ} = \frac{PX}{XQ}$, $\frac{PM}{MR} = \frac{PY}{YR}$,
 10. $\frac{AX}{XY} = \frac{3}{2}$ 12. $\frac{3}{2}$, $\frac{3+2}{2}$, $\frac{5}{3}$, को-को, $\frac{5}{3}$, 15

प्रकरण 2 पायथागोरस का प्रमेय

प्रश्नसंग्रह 2.1

1. पायथागोरस का त्रिक; (1), (3), (4), (6) 2. $NQ = 6$ 3. $QR = 20.5$

4. $RP = 12, PS = 6\sqrt{3}$ 5. दत्त , 45° , $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 2

6. भुजा = $5\sqrt{2}$ सेमी, परिमिति = $20\sqrt{2}$ सेमी 7. (1) 18 (2) $4\sqrt{13}$ (3) $6\sqrt{13}$ 8. 37 सेमी
10. 8.2 मी.

प्रश्नसंग्रह 2.2

1. 12 2. $2\sqrt{10}$ 4. 18 सेमी

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. (1) (B), (2) (B), (3) (A), (4) (C), (5) (D), (6) (C), (7) (B), (8) (A).
2. (1) $a\sqrt{3}$, (2) समकोण त्रिभुज होगा (3) 61 सेमी, (4) 15 सेमी, (5) $x\sqrt{2}$, (6) $\angle PRQ$.
3. $RS = 6$ सेमी, $ST = 6\sqrt{3}$ सेमी 4. 20 सेमी 5. भुजा = 2 सेमी, परिमिति = 6 सेमी
6. 7 7. $AP = 2\sqrt{7}$ सेमी 10. 7.5 किमी / घंटा 12. 8 सेमी 14. 8 सेमी
15. 192 वर्ग इकाई 17. 58 18. 26

प्रकरण 3 वृत्त

प्रश्नसंग्रह 3.1

1. (1) 90° , स्पर्शरेखा त्रिज्या प्रमेय (2) 6 सेमी ; कारण लंब दूरी (3) $6\sqrt{2}$ सेमी (4) 45°
2. (1) $5\sqrt{3}$ सेमी (2) 30° (3) 60° 4. 9 सेमी

प्रश्नसंग्रह 3.2

1. 1.3 सेमी 2. 9.7 सेमी 4. (3) 110° 5. $4\sqrt{6}$ सेमी

प्रश्नसंग्रह 3.3

1. $m(\text{चाप DE}) = 90^\circ$, $m(\text{चाप DEF}) = 160^\circ$

प्रश्नसंग्रह 3.4

1. (1) 60° (2) 30° (3) 60° (4) 300° 2. (1) 70° (2) 220° (3) 110° (4) 55°
3. $m\angle R = 92^\circ$; $m\angle N = 88^\circ$ 7. 44° 8. 121°

प्रश्नसंग्रह 3.5

1. $PS = 18$; $RS = 10$, 2. (1) 7.5 (2) 12 या 6
3. (1) 18 (2) 10 (3) 5 4. 4

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

1. (1) D (2) B (3) B (4) C (5) B (6) D (7) A (8) B (9) A (10) C.
2. (1) 9 सेमी (2) वृत्त के अंतःभाग में (3) 2 बिंदु, 12 सेमी
3. (1) 6 (2) $\angle K = 30^\circ$; $\angle M = 60^\circ$ 5. 10 6. (1) 9 सेमी (2) 6.5 सेमी

- (3) 90° ; MS : SR = 2 : 1 9. $4\sqrt{3}$ सेमी
 13. (1) 180° (2) $\angle AQP \cong \angle ASQ \cong \angle ATQ$
 (3) $\angle QTS \cong \angle SQR \cong \angle SAQ$ (4) $65^\circ, 130^\circ$ (5) 100° 14. (1) 70°
 (2) 130° (3) 210° 15. (1) 56° (2) 6 (3) 16 या 9 16. (1) 15.5°
 (2) 3.36 (3) 6 18. (1) 68° (2) OR = 16.2, QR = 13 (3) 13 21. 13

प्रकरण 4 भूमितीय रचनाएँ

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4

1. (1) C (2) A (3) A

प्रकरण 5 निर्देशांक भूमिति

प्रश्नसंग्रह 5.1

1. (1) $2\sqrt{2}$ (2) $4\sqrt{2}$ (3) $\frac{11}{2}$ (4) 13 (5) 20 (6) $\frac{29}{2}$
 2. (1) एकरेखीय है । (2) एकरेखीय नहीं है । (3) एकरेखीय नहीं है । (4) एकरेखीय है ।
 3. (-1, 0) 7. 7 या -5

प्रश्नसंग्रह 5.2

1. (1, 3) 2. (1) $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ (2) $\left(\frac{4}{7}, -\frac{11}{7}\right)$ (3) $\left(0, \frac{13}{3}\right)$ 3. 2:7 4. (-6, 3)
 5. 2:5, $k = 6$ 6. (11, 18) 7. (1) (1, 3) (2) (6, -2) (3) $\left(\frac{19}{3}, \frac{22}{3}\right)$
 8. (-1, -7) 9. $h = 7, k = 18$ 10. (0, 2) ; (-2, -3)
 11. (-9, -8), (-4, -6), (1, -4) 12. (16, 12), (12, 14), (8, 16), (4, 18)

प्रश्नसंग्रह 5.3

1. (1) 1 (2) $\sqrt{3}$ (3) ढाल निश्चित नहीं हो सकता
 2. (1) 2 (2) $-\frac{3}{8}$ (3) $\frac{5}{2}$ (4) $\frac{5}{4}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6) ढाल निश्चित नहीं हो सकता
 3. (1) एकरेखीय है । (2) एकरेखीय है । (3) एकरेखीय नहीं है । (4) एकरेखीय है ।
 (5) एकरेखीय है । (6) एकरेखीय है ।
 4. $-5; \frac{1}{5}; -\frac{2}{3}$ 6. $k = 5$ 7. $k = 0$ 8. $k = 5$

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

1. (1) D (2) D (3) C (4) C
 2. (1) एकरेखीय है । (2) एकरेखीय है । (3) एकरेखीय नहीं है । 3. (6, 13) 4. 3:1

10. हवाई जहाज जमिन से अधिक से अधिक 1026 मीटर ऊँचाई पर था ।

प्रकरण 7 महत्वमापन

प्रश्नसंग्रह 7.1

1. 11.79 घसेमी
2. 113.04 घसेमी
3. 1413 वसेमी ($\pi = 3.14$ लेने पर)
4. 616 वसेमी
5. 21 सेमी
6. 12 जग
7. 9 सेमी
8. 273π वसेमी
9. 20 गोलियाँ
10. 94.20 घसेमी, 103.62 वसेमी
11. 5538.96 वसेमी, 38772.72 घसेमी
12. 1468.67π घसेमी

प्रश्नसंग्रह 7.2

1. 10.780 लीटर
2. (1) 628 वसेमी (2) 1356.48 वसेमी (3) 1984.48 घसेमी

प्रश्नसंग्रह 7.3

1. 47.1 वसेमी
2. 25.12 सेमी
3. 3.85 वसेमी
4. 214 वसेमी
5. 4 सेमी
6. (1) 154 वसेमी (2) 25.7 वसेमी (3) 128.3 वसेमी (4) 10.2 वसेमी
8. 7.3 सेमी ; 22 सेमी
9. (1) 90° (2) 22 सेमी
10. (1) 12.83 वसेमी (2) 89.83 वसेमी (3) 115.5 वसेमी (4) 3.5 सेमी
12. $x = 154$ वसेमी ; $y = 38.5$ वसेमी ; $z = 101.5$ वसेमी
13. (1) 84.87 वसेमी (2) 25.67 वसेमी (3) 77.01 वसेमी (4) 7.86 वसेमी

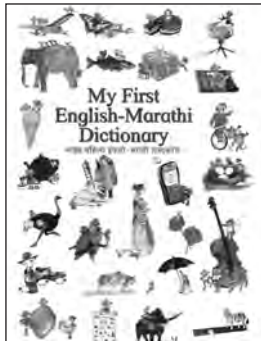
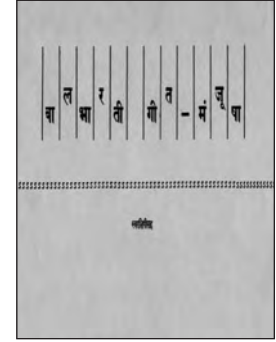
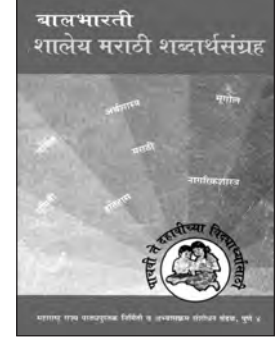
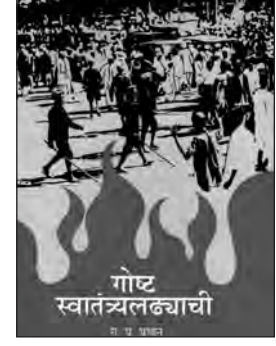
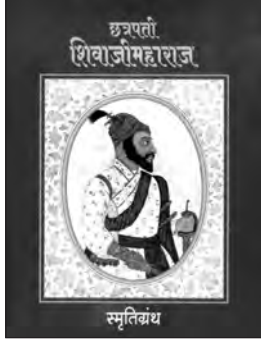
प्रश्नसंग्रह 7.4

1. 3.92 वसेमी
2. 9.08 वसेमी
3. 0.65625 वडकाई
4. 20 सेमी
5. 20.43 वसेमी ; 686.07 वसेमी

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 7

1. (1) A, (2) D, (3) B, (4) B, (5) A, (6) A, (7) D, (8) C.
2. 20.35 लीटर
3. 7830 गोलियाँ
4. 2800 सिक्के ($\pi = \frac{22}{7}$ लेकर)
5. 6336 रुपये
6. 452.16 वसेमी ; 3385.94 ग्राम
7. 2640 वसेमी
8. 243 मीटर
9. 150° ; 5π सेमी
10. 39.28 वसेमी





- पाठ्यपुस्तक मंडळाची वैशिष्ट्यपूर्ण पाठ्येत्तर प्रकाशने.
- नामवंत लेखक, कवी, विचारवंत यांच्या साहित्याचा समावेश.
- शालेय स्तरावर पूरक वाचनासाठी उपयुक्त.



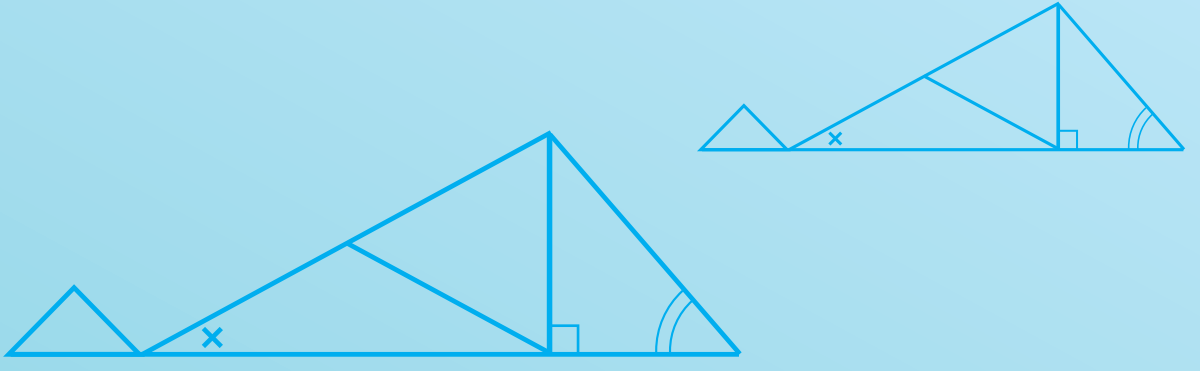
पुस्तक मागणीसाठी www.ebalbharati.in, www.balbharati.in संकेत स्थळावर भेट द्या.

साहित्य पाठ्यपुस्तक मंडळाच्या विभागीय भांडारांमध्ये विक्रीसाठी उपलब्ध आहे.



ebalbharati

विभागीय भांडारे संपर्क क्रमांक : पुणे - ☎ २५६५९४६५, कोल्हापूर- ☎ २४६८५७६, मुंबई (गोरेगाव) - ☎ २८७७९८४२, पनवेल - ☎ २७४६२६४६५, नाशिक - ☎ २३९१५११, औरंगाबाद - ☎ २३३२१७१, नागपूर - ☎ २५४७७१६/२५२३०७८, लातूर - ☎ २२०९३०, अमरावती - ☎ २५३०९६५



महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व
अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ,
पुणे-४११००४.

हिंदी गणित इ. १० वी भाग-२ ₹ 77.00